Voorbereiding op de Toelatingswedstrijd van de Polytechnische Faculteit

Koninklijke Militaire School

Algebra

Bijkomende proef POL - 2020

Oplossing van Vraag 1

Plaats van de vraag in het plan van de leerstof

- Analyse
- Algebra
    - Complexe getallen
    - Veeltermen
- Trigonometrie
- Meetkunde en Analytische Meetkunde
- Waarschijnlijkheidsrekenen en Statistiek

Vraag

(a) (2 punten) Bepaal $k \in \mathbb{R}$, zodat voor elke complex getal $z = a + b\mathrm{i}$ met $b = -2a$ geldt

$$|z - k + 7i| = |z - 2 + 9i|.$$

▸ Herinnering van theorie

▸ Hint

▸ Oplossing

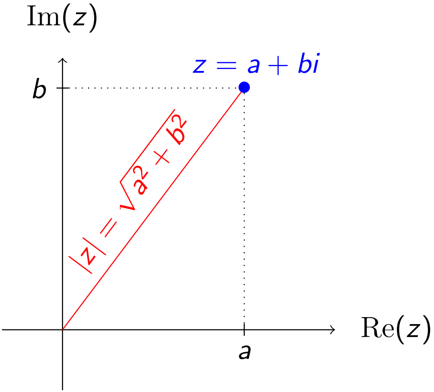
(b) (2 punten) $-\mathrm{i}$ is een wortel van $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Zoek de andere wortels.

▸ Hint

▸ Oplossing

Herinnering van theorie voor deelvraag (a)

Terug naar de vraag



Zij een complex getal z een reëel deel a en een imaginair deel b ($a, b \in \mathbb{R}$), zo dat $z = a + bi$, met i de imaginaire eenheid.

- De modulus van het complexe getal z wordt gegeven door $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- De modulus van z is een niet-negatieve reele.

Hint voor deelvraag (a)

Terug naar de vraag

- Gezien $b = -2a$, schrijven we $z = a(1 - 2i)$.
- Ga verder door deze vorm van z in de gegeven vergelijking te substitueren.

Oplossing van deelvraag (a)

Terug naar de vraag

Daar $b = -2a$, schrijven we $z = a(1-2i)$ en gaan we over tot substitutie. We krijgen achtereenvolgens:

$$
\begin{aligned}
|(a-k)+i(7-2a)| &= |(a-2)+i(9-2a)| && (1)\\
\Longleftrightarrow\ (a-k)^2+(7-2a)^2 &= (a-2)^2+(9-2a)^2 && (2)\\
\Longleftrightarrow\ (-2k-28)a+(k^2+49) &= -40a+85 && (3)
\end{aligned}
$$

Aangezien (3) geldig moet zijn voor alle $a \in \mathbb{R}$, kunnen we de coëfficiënten van dezelfde machten van a identificeren:

$$
\begin{aligned}
2k+28 &= 40 && (4)\\
k^2+49 &= 85 && (5)
\end{aligned}
$$

Uit de laatste twee vergelijkingen, krijgen we $k = 6$.

Hintvoor deelvraag (b)

Terug naar de vraag

- Merk op dat de coëfficiënten van de polynoom reëel zijn.
- Dus als een complex getal $z = a + bi$ een wortel is, dan is zijn geconjugeerde complex $z = a - bi$ ook een wortel.
- We kunnen de polynoom delen door $z + i$ en door $z - i$.

Oplossing van deelvraag (b)

Terug naar de vraag

Aangezien de coëfficiënten van de polynoom reëel zijn, weten we dat als i een wortel is, $\bar{i} = -i$ ook een wortel is.

- We kunnen de polynoom dus tweemaal delen volgens het schema van Horner, eenmaal voor $z - i$ en eenmaal voor $z + i$.
- Equivalent kunnen we een Euclidische deling uitvoeren door $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$.

We bekomen

$$\frac{z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3}{z^2 + 1} = z^2 - 2z + 3.$$

De wortels van $z^2 - 2z + 3$ zijn:

$$z_1 = 1 + i\sqrt{2}$$
$$z_2 = 1 - i\sqrt{2}.$$

De verzameling van vier wortels van de polynoom is dus $\{i, -i, 1 + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}\}$.