Préparation au Concours d'Admission de la Faculté Polytechnique

Ecole Royale Militaire

Algèbre

Epreuve complémentaire POL - 2020

Solution de la Question 1

Position de la question dans le plan des matières

- Analyse
- Algèbre
  - Nombres complexes
  - Polynômes
- Trigonométrie
- Géométrie et Géométrie Analytique
- Probabilités et Statistique

Question

(a) (2 points) Déterminer $k \in \mathbb{R}$, de sorte que pour chaque nombre complexe $z = a + bi$ avec $b = -2a$ on ait :

$$|z - k + 7i| = |z - 2 + 9i|$$

▸ Rappel de théorie

▸ Indication

▸ Solution

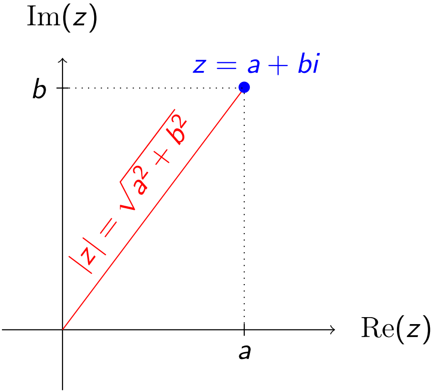
(b) (2 points) On sait que $-i$ est une racine de $z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3 = 0$. Trouver les autres racines.

▸ Indication

▸ Solution

Rappel de theorie pour la sous-question (a)

Retour à la question



Soit un nombre complexe z avec une partie réelle a et une partie imaginaire b ($a, b \in \mathbb{R}$), de sorte que $z = a + bi$, avec i l'unité imaginaire.

- Le module du nombre complexe z est donné par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Le module de z est un réel non négatif.

Indication pour la sous-question (a)

◂ Retour à la question

- Vu que $b = -2a$, on peut écrire $z = a(1 - 2i)$.
- Procéder par substitution de cette forme de z dans l'équation donnée.

Solution de la sous-question (a)

Retour à la question

Vu que $b = -2a$, on écrit $z = a(1-2i)$ et on procède par substitution. On obtient successivement:

$$
\begin{aligned}
|(a-k) + i(7-2a)| &= |(a-2) + i(9-2a)| && (1)\\
\iff (a-k)^2 + (7-2a)^2 &= (a-2)^2 + (9-2a)^2 && (2)\\
\iff (-2k-28)a + (k^2+49) &= -40a + 85 && (3)
\end{aligned}
$$

Comme (3) doit être valable pour tout $a \in \mathbb{R}$, on peut identifier les coefficients des mêmes puissances de a:

$$
\begin{aligned}
2k + 28 &= 40 && (4)\\
k^2 + 49 &= 85 && (5)
\end{aligned}
$$

Des deux dernières équations, il vient $k = 6$.

Indication pour la sous-question (b)

Retour à la question

- Remarquer que les coefficients du polynôme sont réels.
- En conséquence, si un nombre complexe $z = a + bi$ est une racine, alors son complexe conjugé $\bar{z} = a - bi$ est également racine.
- On peut diviser le polynôme par $z + i$ et par $z - i$.

Solution de la sous-question (b)

Retour à la question

Vu que les coefficients du polynôme sont réels, on sait que si i est racine alors $\bar{i} = -i$ est également racine.

- On peut donc diviser le polynôme en utilisant deux fois le schéma de Horner, une fois pour $z - i$ et une fois pour $z + i$.
- De manière équivalent, on peut effectuer une division euclidienne par $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$.

On obtient

$$\frac{z^4 - 2z^3 + 4z^2 - 2z + 3}{z^2 + 1} = z^2 - 2z + 3.$$

Les racines de $z^2 - 2z + 3$ sont

$$z_1 = 1 + i\sqrt{2}$$
$$z_2 = 1 - i\sqrt{2}.$$

Ainsi l'ensemble des quatre racines du polynômes est $\{i, -i, 1 + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}\}$.