Proef POL

2019 — Analyse - Ruimtemeetkunde - Rijen en reeksen - Complexe getallen — Reeks B

5 vragen - 4 uren

1. De tekeningen die bij sommige vragen zijn opgenomen dienen enkel ter illustratie. De figuren zijn niet op schaal getekend. Probeer dus niet na te meten.
2. Handboeken en rekentoestellen zijn niet toegestaan. Het gebruik van een lat, een gradenboog, een geodriehoek en een passer is wel toegelaten.
3. Laat, in uw antwoorden, getallen zoals π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = {}^e\!\log 2$, $\ln 3$, …, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, … in hun symbolische vorm staan.

Vraag 1 (4 punten) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 punt) Bereken I_0

(b) (1 punt) Bereken I_1

(c) (1 punt) Toon aan dat $\forall n \in \mathbb{N}_0$ er geldt dat $(3+2n)\,I_n = 2nI_{n-1}$

(d) (1 punt) Bereken I_5

Vraag 2 (4 punten) Gegeven: $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) (1 punt) Bereken de limiet van f voor $x \to +\infty$ en $x \to -\infty$

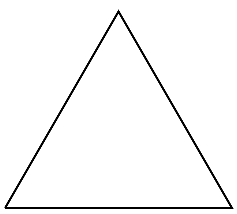
(b) (2 punten) Bereken de afgeleide van f en bewijs het volgende verband tussen f en zijn afgeleide f':

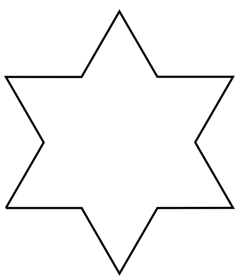
$$f'(x) = f(x)\big(1 - f(x)\big)$$

(c) (1 punt) Stel $g(x) = 2f(x) - 1$. Bepaal het verband tussen g en g'.

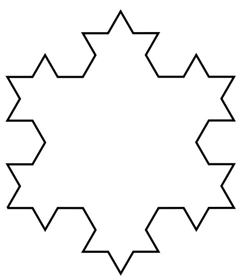
Vraag 3 (4 punten) De Koch sneeuwvlok kan worden geconstrueerd door te beginnen met een gelijkzijdige driehoek en vervolgens elke zijde recursief als volgt aan te passen:

1. Verdeel het lijnstuk in drie even lange lijnstukken.
2. Teken een gelijkzijdige driehoek met als basis het middenste lijnstuk van stap 1.
3. Verwijder het lijnstuk dat de basis is van de driehoek uit stap 2.





1ste iteratie



2de iteratie

De oppervlakte van de oorspronkelijk driehoek bedraagt 1.

(a) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na 1 iteratie.

(b) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na 2 iteraties.

(c) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na n iteraties.

(d) (1 punt) Wat is de limiet van de oppervlakte van de Koch sneeuwvlok na $n \to +\infty$ iteraties?

Vraag 4 (4 punten) Een toetsenbord heeft 42 toetsen waarvan 26 de letters van het alfabet voorstellen. De andere stellen cijfers of symbolen voor.

(a) (1 punt) De 3-jarige Arnaud drukt een willekeurige toets van het toetsenbord in, elke toets heeft dezelfde waarschijnlijkheid om ingedrukt te worden. Wat is de waarschijnlijkheid dat hij een letter van zijn naam heeft ingedrukt?

(b) Arnaud drukt achtereenvolgens 6 toetsen in, die al dan niet verschillende kunnen zijn, wat is de waarschijnlijkheid van volgende gebeurtenissen:

i. (1 punt) Arnaud drukt 1 letter twee keer en 4 andere verschillende letters in;

ii. (1 punt) Arnaud drukt zijn voornaam in;

iii. (1 punt) Arnaud drukt zijn voornaam in, wetende dat hij 1 letter twee keer en 4 andere verschillende letters heeft ingedrukt.

Vraag 5 (4 punten) Gegeven: $A(3, 2, 1)$, $B(1, 0, 3)$ en

$$e : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

(a) (1 punt) De meetkundige plaats van alle punten C zodat het middelpunt van de omschreven cirkel van $\triangle ABC$ op e ligt, is een cirkel met middelpunt $(1, 1, 1)$ en straal $\sqrt{5}$, gelegen in het vlak $\alpha : x - 2y - z + 2 = 0$. Bewijs.

(b) (1 punt) Bepaal het punt S van deze meetkundige plaats dat in $\beta : 2x + y + 2 = 0$ ligt.

(c) (1 punt) Bepaal de oppervlakte van $\triangle ABS$.

(d) (1 punt) Bepaal $\tan \widehat{ASB}$.