Epreuve POL

2019 | Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes | Série B

5 questions - 4 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerre et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \ldots,$ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

(a) (1 point) Calculer I_0

(b) (1 point) Calculer I_1

(c) (1 point) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}_0$ on a $(3+2n)\,I_n = 2nI_{n-1}$.

(d) (1 point) Calculer I_5

Question 2 (4 points) Soit : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

(a) (1 point) Calculer la limite de f pour $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$

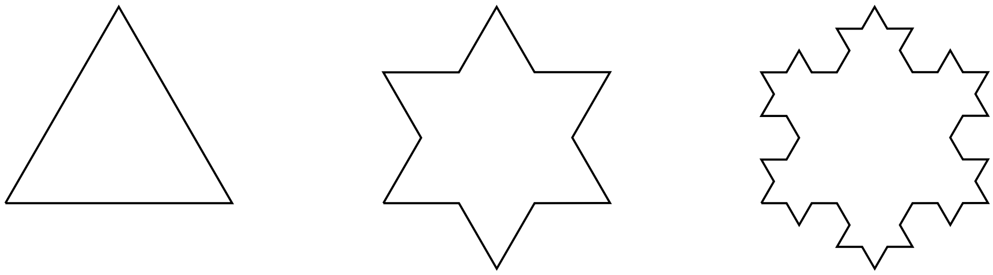
(b) (2 points) Calculer la dérivée de f et démontrer la relation suivante entre f et f' :

$$f'(x) = f(x)\big(1 - f(x)\big)$$

(c) (1 point) Soit $g(x) = 2f(x) - 1$. Déterminer la relation entre g et g'.

Question 3 (4 points) Le flocon de neige de Koch peut être construit en commençant par un triangle équilatéral et en ajustant ensuite chaque côté récursivement comme suit :

1. Divisez le segment en trois segments de longueur égale.
2. Dessinez un triangle équilatéral basé sur le segment médian de l'étape 1.
3. Retirez le segment de ligne qui est la base du triangle de l'étape 2.



1er itération 2ème itération

La surface du triangle d'origine est 1.

(a) (1 point) Déterminer la surface du flocon de neige de Koch après 1 itération.

(b) (1 point) Déterminer la surface du flocon de neige de Koch après 2 itérations.

(c) (1 point) Déterminer la surface du flocon de neige de Koch après n itérations.

(d) (1 point) Quelle est la limite de la surface du flocon de neige de Koch après $n \to +\infty$ itérations ?

Question 4 (4 points) Un clavier comporte 42 touches dont 26 représentent les 26 lettres de l'alphabet, les autres représentent des chiffres ou des symboles.

(a) (1 point) Arnaud, qui a 3 ans, frappe au hasard sur une touche du clavier, chaque touche ayant la même probabilité d'être frappée. Quelle est la probabilité qu'il frappe une lettre de son prénom ?

(b) Arnaud frappe successivement 6 touches, distinctes ou non, quelle est la probabilité des événements suivants :

i. (1 point) Arnaud frappe une lettre deux fois et 4 autres lettres différentes ;

ii. (1 point) Arnaud frappe son prénom ;

iii. (1 point) Arnaud frappe son prénom, si l'on sait qu'il a frappé une lettre deux fois et 4 autres lettres différentes.

Question 5 (4 points) Soient : $A(3, 2, 1)$, $B(1, 0, 3)$ et

$$e \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

(a) (1 point) Le lieu géométrique de tous les points C de sorte que le centre du cercle circonscrit au $\triangle ABC$ se situe sur e est un cercle avec centre $(1, 1, 1)$ et rayon $\sqrt{5}$, dans le plan $\alpha \equiv x - 2y - z + 2 = 0$. Démontrer.

(b) (1 point) Déterminer le point S de ce lieu géométrique qui se trouve en $\beta \equiv 2x + y + 2 = 0$.

(c) (1 point) Déterminer l'aire du $\triangle ABS$.

(d) (1 point) Déterminer $\tan \widehat{ASB} = \text{tg}\, \widehat{ASB}$.