

Prüfung POL

2019 Analyse - Geometrie im Raum - Folgen und Reihen - Komplexe Zahlen Reihe B
5 Fragen - 4 Stunden

1. Die mit bestimmten Fragen verbundenen Figuren sind illustrativ und nicht maßstabsgerecht. Es ist sinnlos, sie zu messen.
2. Lehrbücher und Taschenrechner sind nicht erlaubt.
3. Lassen Sie in Ihren Antworten Zahlen wie π , e , $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \dots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ in ihrer symbolischen Form.

Frage 1 (4 Punkte) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$$

- (a) (1 Punkt) Berechnen Sie I_0
- (b) (1 Punkt) Berechnen Sie I_1
- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\forall n \in \mathbb{N}_0$ Sie $(3 + 2n) I_n = 2n I_{n-1}$ haben.
- (d) (1 Punkt) Berechnen Sie I_5

Frage 2 (4 Punkte) Gegeben: $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

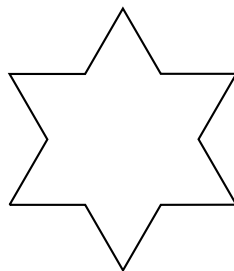
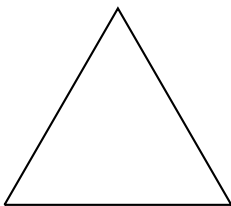
- (a) (1 Punkt) Berechnen Sie den f Grenzwert für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$.
- (b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Ableitung von f und beweisen Sie die folgende Beziehung zwischen f und f' :

$$f'(x) = f(x)(1 - f(x))$$

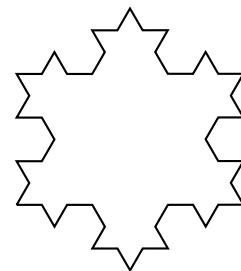
- (c) (1 Punkt) Gegeben $g(x) = 2f(x) - 1$. Bestimmen Sie die Beziehung zwischen g und g' .

Frage 3 (4 Punkte) Die Koch-Schneeflocke kann konstruiert werden, indem man mit einem gleichseitigen Dreieck beginnt und dann jede Seite rekursiv wie folgt einstellt:

1. Teilen Sie das Segment in drei gleich lange Segmente auf
2. Zeichnen Sie ein gleichseitiges Dreieck basierend auf dem mittleren Segment von Schritt 1.
3. Entfernen Sie das Liniensegment, das die Basis des Dreiecks ist, aus Schritt 2.



1e Iteration



2e Iteration

Die Fläche des ursprünglichen Dreiecks ist gleich 1.

- (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Oberfläche der Koch-Schneeflocke nach 1 Iterationsschritt.
- (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Oberfläche der Koch-Schneeflocke nach 2 Iterationsschritten.

Prüfung POL

2019 Analyse - Geometrie im Raum - Folgen und Reihen - Komplexe Zahlen Reihe B
5 Fragen - 4 Stunden

- (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Oberfläche der Koch-Schneeflocke nach n Iterationsschritten.
- (d) (1 Punkt) Was ist die Begrenzung der Oberfläche der Koch-Schneeflocke nach $n \rightarrow +\infty$ Iterationsschritten?

Frage 4 (4 Punkte) Eine Tastatur hat 42 Tasten, von denen 26 die 26 Buchstaben des Alphabets darstellen, die anderen Zahlen oder Symbole.

- (a) (1 Punkt) Arnaud, der 3 Jahre alt ist, drückt zufällig auf eine Taste der Tastatur, wobei jede Taste die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, getroffen zu werden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er einen Charakter von seinem Vornamen trifft?
- (b) Arnaud schlägt auf 6 Tasten hintereinander, verschieden oder nicht, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
- (1 Punkt) Arnaud trifft einen Buchstaben zweimal und vier andere verschiedene Buchstaben;
 - (1 Punkt) Arnaud trifft seinen Vornamen;
 - (1 Punkt) Arnaud tippte seinen Vornamen, da er wusste, dass er einen Buchstaben zweimal und vier andere verschiedene Buchstaben tippte.

Frage 5 (4 Punkte) Gegeben: $A(3, 2, 1)$, $B(1, 0, 3)$ und

$$e : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

- (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die geometrische Lage aller Punkte C , so dass der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises des $\triangle ABC$ innerhalb von e liegt. (Antwort: ein Kreis mit Mittelpunkt $(1, 1, 1)$ und Radius $\sqrt{5}$, in der $\alpha : x - 2y - z + 2 = 0$ Ebene.)
- (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den S -Punkt dieses geometrischen Ortes, der sich in $\beta : 2x + y + 2 = 0$ befindet.
- (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Fläche des ABS -Dreiecks.
- (d) (1 Punkt) Bestimmen Sie $\tan \widehat{ASB}$.