1. De tekeningen die bij sommige vragen zijn opgenomen dienen enkel ter illustratie. De figuren zijn niet op schaal getekend. Probeer dus niet na te meten.
2. Handboeken en rekentoestellen zijn niet toegestaan. Het gebruik van een lat, een gradenboog, een geodriehoek en een passer is wel toegelaten.
3. Laat, in uw antwoorden, getallen zoals $\pi$, $e$, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ in hun symbolische vorm staan.

**Vraag 1** (4 punten) Gegeven het complex getal $a = \frac{1}{2}(1+i)$.

(a) (1 punt) Bereken de modulus van het complexe getal $a - 1$

(b) (1 punt) Stel dat $z_0 = 1, \forall n \in \mathbb{R}_0 : \; z_n = a^n$ en $u_n = |z_n - z_{n-1}|$. Toon aan dat de rij $(u_n)$ een geometrische rij is en bepaal de eerste term $u_1$ en de rede.

(c) (1 punt) Bereken de som $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

(d) (1 punt) Bereken de limiet van $s_n$ voor $n \to +\infty$, indien deze bestaat.

**Vraag 2** (4 punten) Gegeven:

$$b : \frac{x - 4a - 1}{a} = \frac{y - 2a - 2}{1} = \frac{z}{-a} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$c : \begin{cases} x + y + 2a - 1 = 0 \\ z + a + 3 = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$d : \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \quad (a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\})$$

(a) (1 punt) Bewijs $\forall a \in \mathbb{R}_0$: $b$ en $c$ zijn kruisend.

(b) (1 punt) Zoek een Cartesiaanse vergelijking van het vlak $\alpha$ dat $b$ omvat en evenwijdig is met $d$.

(c) (1 punt) Zoek een Cartesiaanse vergelijking van het vlak $\beta$ dat $c$ omvat en evenwijdig is met $d$.

(d) (1 punt) Toon aan dat de vlakken $\alpha$ en $\beta$ altijd ($\forall a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$) snijdend zijn en dat de snijlijn door een vast punt gaat. Welk is dat punt?

**Vraag 3** (4 punten) De kromming van een functie wordt als volgt gedefinieerd:

$$\left| \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)\right)^{\frac{3}{2}}} \right| \tag{1}$$

(a) (1 punt) Bereken de kromming van de functie $f(x) = \ln x$.

(b) (2 punten) Bereken de afgeleide van de kromming van $f$.

(c) (1 punt) Voor welke waarden van $x$ is de kromming van $f$ maximaal? Indien een maximum niet bestaat, bereken de limieten van de kromming aan de grenzen van het domein.

**Vraag 4** (4 punten) Gegeven:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \equiv \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x$$

(a) (1 punt) Bereken: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^1\,\mathrm{d}x$

(b) (1 punt) Bereken: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2\,\mathrm{d}x$

(c) (2 punten) Bewijs door volledige inductie: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = n!$

**Vraag 5** (4 punten) De vlag van Goed in Wiskunde is een rechthoek van 2 meter (horizontaal) bij 1,2 meter (verticaal). Een willekeurig punt strikt binnen de rechthoek wordt met de omtrek van de rechthoek om de 40 centimeter verbonden.

De aldus gevormde driehoeken en vierhoeken zijn afwisselend wit en grijs gekleurd. Het totaal van de grijze gebieden is groter dan het totaal van de witte gebieden: het verschil is precies een honderdste van het oppervlak van de rechthoek.

Van de linkerbovenhoek horizontaal naar rechts, hoe ver ga je naar de eerste kleurverandering (van wit naar grijs) in centimeters?