Epreuve POL

Analyse - Géométrie dans l'espace - Suites et séries - Nombres complexes

5 questions - 4 heures

1. Les figures associées à certaines questions sont illustratives et ne sont pas faites à l'échelle. Cela ne sert à rien de mesurer.
2. Les manuels et les calculatrices ne sont pas permis. Les lattes, rapporteurs, équerre et compas sont autorisés.
3. Dans vos réponses, laissez des nombres comme π, e, $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ sous leur forme symbolique.

Question 1 (4 points) On donne le nombre complexe $a = \frac{1}{2}(1+i)$.

(a) (1 point) Calculer le module du nombre complexe $a - 1$.

(b) (1 point) On pose $z_0 = 1, \forall n \in \mathbb{R}_0 : z_n = a^n$ et $u_n = |z_n - z_{n-1}|$. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et en préciser le premier terme u_1 et la raison.

(c) (1 point) Calculer la somme $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

(d) (1 point) Calculer, si elle existe, la limite de s_n lorsque $n \to +\infty$.

Question 2 (4 points) Soient :

$$b : \frac{x-4a-1}{a} = \frac{y-2a-2}{1} = \frac{z}{-a} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$c : \begin{cases} x + y + 2a - 1 = 0 \\ z + a + 3 = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$d : \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \quad (a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\})$$

(a) (1 point) Démontrer $\forall a \in \mathbb{R}_0$: b et c se croisent.

(b) (1 point) Trouver une équation cartésienne du plan α qui inclut b et est parallèle à d.

(c) (1 point) Trouver une équation cartésienne du plan β qui inclut c et est parallèle à d.

(d) (1 point) Démontrer que les surfaces α et β se coupent toujours ($\forall a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$) et que la droite d'intersection passe par un point fixe. Quel est ce point ?

Question 3 (4 points) La courbure d'une fonction est définie comme suit :

$$\left| \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)\right)^{\frac{3}{2}}} \right| \tag{1}$$

(a) (1 point) Calculer la courbure de la fonction $f(x) = \ln x$.

(b) (2 points) Calculer la dérivée de la courbure de f.

(c) (1 point) Pour quelles valeurs de x la courbure de f est-elle maximale ? Si un maximum n'existe pas, calculer les limites de la courbure aux bornes du domaine.

Question 4 (4 points) Soit :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x \equiv \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\ \mathrm{d}x$$

(a) (1 point) Calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^1\,\mathrm{d}x$

(b) (1 point) Calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2\,\mathrm{d}x$

(c) (2 points) Démontrer par induction complète : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = n!$

Question 5 (4 points) Le drapeau de Fort En Maths est un rectangle de 2 mètres (horizontale) sur 1,2 mètre (verticale). A partir de n'importe quel point strictement intérieur au rectangle, on joint le contour du rectangle tous les 40 centimètres.

On colorie alternativement en blanc et en gris les triangles et les quadrilatères ainsi formés. Le total des aires grises dépasse le total des aires blanches : la différence est exactement le centième de l'aire du rectangle.

En partant du sommet en haut à gauche et en allant à l'horizontale vers la droite, quelle distance parcourt-on jusqu'au premier changement de couleur (du blanc au gris), en centimètres ?