

Prüfung POL

2018 Analyse - Geometrie im Raum - Folgen und Reihen - Komplexe Zahlen Reihe B
5 Fragen - 4 Stunden

1. Die mit bestimmten Fragen verbundenen Figuren sind illustrativ und nicht maßstabsgerecht. Es ist sinnlos, sie zu messen.
2. Lehrbücher und Taschenrechner sind nicht erlaubt.
3. Lassen Sie in Ihren Antworten Zahlen wie π , e , $\ln 2 = \log_e 2 = \log^e 2$, $\ln 3, \dots$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \dots$ in ihrer symbolischen Form.

Frage 1 (4 Punkte) Gegeben die komplexen Zahl $a = \frac{1}{2}(1 + i)$.

- (a) (1 Punkt) Berechnen Sie den Betrag $a - 1$.
- (b) (1 Punkt) Wir setzen $z_0 = 1, \forall n \in \mathbb{R}_0 : z_n = a^n$ und $u_n = |z_n - z_{n-1}|$. Zeigen Sie, dass die (u_n) -Folge eine geometrische Folge ist, und präzisieren Sie den ersten Begriff u_1 und die Differenz.
- (c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Summe $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- (d) (1 Punkt) Berechnen Sie, falls verfügbar, den s_n Grenzwert, wenn $n \rightarrow +\infty$.

Frage 2 (4 Punkte) Gegeben:

$$b : \frac{x - 4a - 1}{a} = \frac{y - 2a - 2}{1} = \frac{z}{-a} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$c : \begin{cases} x + y + 2a - 1 = 0 \\ z + a + 3 = 0 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R}_0)$$

$$d : \frac{x}{a} = \frac{y}{a} = \frac{z}{a+1} \quad (a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\})$$

- (a) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass sich b und c kreuzen.
- (b) (1 Punkt) Finden Sie eine kartesische Gleichung der Ebene α , die b enthält und parallel zu d ist.
- (c) (1 Punkt) Finden Sie eine kartesische Gleichung der Ebene β , die c enthält und parallel zu d ist.
- (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich Flächen α und β immer ($\forall a \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$) schneiden und dass die Schnittlinie durch einen Fixpunkt verläuft. Welcher ist dieser Punkt?

Frage 3 (4 Punkte) Die Krümmung einer Funktion ist wie folgt definiert:

$$\left| \frac{f''(x)}{(1 + f'(x))^{\frac{3}{2}}} \right| \quad (1)$$

- (a) (1 Punkt) Berechnung der Krümmung der Funktion $f(x) = \ln x$.
- (b) (2 Punkte) Berechnung der Ableitung der Krümmung von f .
- (c) (1 Punkt) Für welche x -Werte ist die maximale f -Krümmung? Wenn kein Maximum vorhanden ist, berechnen Sie die Grenzwerte der Krümmung der Domänengrenzen.

Prüfung POL

Frage 4 (4 Punkte) Gegeben:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie: $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^1 dx$

(b) (1 Punkt) Berechnen Sie: $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^2 dx$

(c) (2 Punkte) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$

Frage 5 (4 Punkte) Die Flagge von Fort En Maths ist ein Rechteck von 2 Metern (horizontal) und 1,2 Metern (vertikal). Von jedem Punkt innerhalb des Rechtecks wird die Kontur des Rechtecks alle 40 Zentimeter verbunden.

Die so gebildeten Dreiecke und Vierecke sind abwechselnd weiß und grau gefärbt. Die Summe der Graufächen übersteigt die Summe der weißen Flächen: Die Differenz beträgt genau ein Hundertstel der Fläche des Rechtecks.

Von links oben nach rechts, wie weit geht es bis zum ersten Farbwechsel (von weiß nach grau), in Zentimetern?

