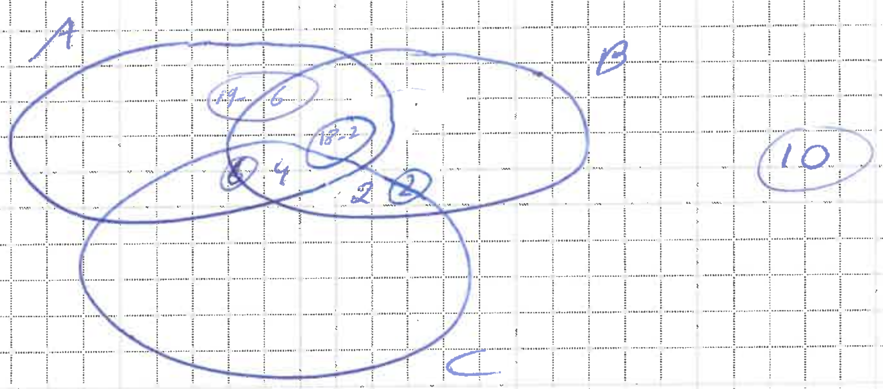
Gemeenschappelijke proef 2021
Algebra - Analyse - Meetkunde - Goniometrie
Reeks C - Deel 2
10 Vragen

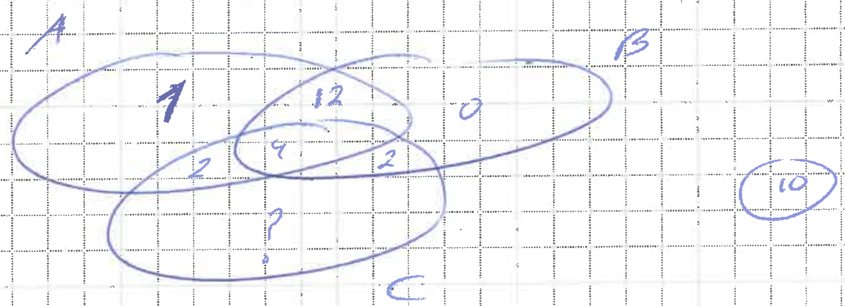
O1c 33 studenten nemen deel aan een test met drie vragen (A, B en C).
Vier studenten hebben een juist antwoord op alle vragen.
Twee studenten hebben een juist antwoord op vraag B en C, maar niet op vraag A.
Negentien studenten hebben een juist antwoord op vraag A; hiervan hebben er 6 ook een juist antwoord op vraag C.
Achttien studenten hebben een juist antwoord op vraag B; hiervan hebben er twee geen juist antwoord op vraag A.
Tien studenten hebben geen enkel juist antwoord.

Hoeveel studenten zijn er die enkel een juist antwoord hadden voor vraag C ?

Antwoord: 2 . student(en)

Totaal 33





Totaal $= 10 + 1 + 12 + 2 + 4 + 2 + ? = 33$

$31 + ? = 33$

$? = 2$

O2c U heeft 9 muntstukken in uw bezit, waarvan er 4 muntstukken uit België, 3 muntstukken uit Nederland en 2 muntstukken uit Frankrijk komen. Indien u alle muntstukken tegelijkertijd opgooit en er maar twee opvangt in elk hand, wat is dan de kans dat u exact twee identieke muntstukken heeft in minstens één van uw handen? (Elk individueel muntstuk heeft dezelfde waarschijnlijkheid om opgevangen te worden.)

Rond uw antwoord af tot het dichtstbijzijnde geheel percent, dus zonder cijfers na de komma.

Antwoord = 48 %

Er zijn 4 Belgische muntstukken (B)
3 Nederlandse (N)
2 Franse (F)

We beschouwen alle permutaties van B B B B N N N F F en weerhouden de eerste 2 (eerste hand) en volgende 2 (tweede hand). Als X een willekeurig muntstuk voorstelt en ~~B~~ een niet-Belgisch (etc) dan zijn de "goede" worpen:

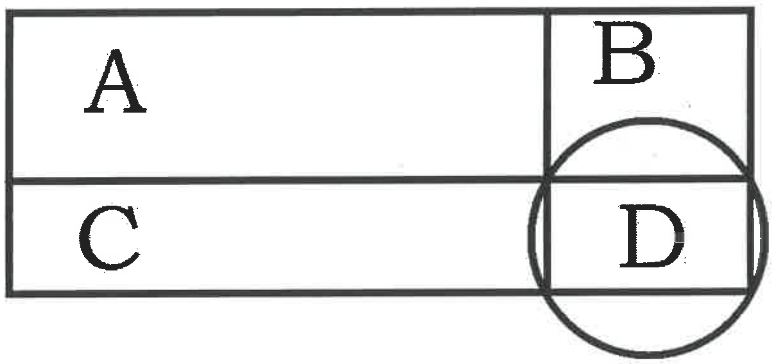
B B	X X	X X X X X	met kans	$\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$	$= \frac{12}{72}$
N N	X X	X X X X X		$\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8}$	$= \frac{6}{72}$
F F	X X	X X X X X		$\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8}$	$= \frac{2}{72}$
N F	B B	X X X X X		$\frac{3}{9}\ \frac{2}{8} \cdot \frac{4}{7}\ \frac{3}{6}$	$= \frac{72}{3024}$
F N	B B	X X X X X		$\frac{2}{9}\ \frac{3}{8}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{6}$	$= \frac{72}{3024}$
$\cancel{B}$ B	B B	X X X X X		$\frac{5}{9}\ \frac{4}{8}\ \frac{3}{7}\ \frac{2}{6}$	$= \frac{120}{3024}$
B $\cancel{B}$	B B	X X X X X		$\frac{4}{9}\ \frac{5}{8}\ \frac{3}{7}\ \frac{2}{6}$	$= \frac{120}{3024}$
B F	N N	X X X X X		$\frac{4}{9}\ \frac{2}{8}\ \frac{3}{7}\ \frac{2}{6}$	$= \frac{48}{3024}$
F B	N N	X X X X X		$\frac{2}{9}\ \frac{4}{8}\ \frac{3}{7}\ \frac{2}{6}$	$= \frac{48}{3024}$
$\cancel{N}$ N	N N	X X X X X		$\frac{6}{9}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{6}$	$= \frac{36}{3024}$
N $\cancel{N}$	N N	X X X X X		$\frac{3}{9}\ \frac{6}{8}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{6}$	$= \frac{36}{3024}$
N B	F F	X X X X X		$\frac{3}{9}\ \frac{4}{8}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{6}$	$= \frac{24}{3024}$
B N	F F	X X X X X		$\frac{4}{9}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{6}$	$= \frac{24}{3024}$
$\cancel{F}$ F	F F	X X X X X		$\frac{7}{9}\ \frac{2}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{0}{7}$	$= 0$
F $\cancel{F}$	F F	X X X X X		$\frac{2}{9}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{0}{7}$	$= 0$

$$\text{Totale kans} = \frac{12+6+2}{72} + \frac{72+72+120+120+48+48+36+36+24+24}{3024}$$

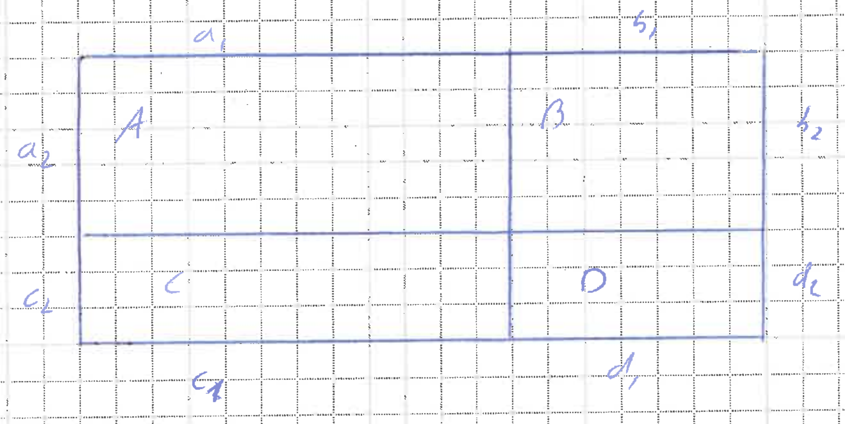
$$\approx 0{,}278 + 0{,}198 \approx 0{,}476 \approx 48\%$$

O3c We verdelen een rechthoek in vier kleinere rechthoeken, zoals aangegeven op de figuur hieronder.

Als rechthoek A een oppervlakte heeft van 12 m^2 en een omtrek van 16 m, rechthoek B een oppervlakte heeft van 54 m^2 en rechthoek C een oppervlakte heeft van 4 m^2 en een omtrek van 8 m, wat is dan de oppervlakte van de grootste cirkel die door de vier hoekpunten van rechthoek D gaat ? Geef uw antwoord, uitgedrukt in vierkante meter, afgerond naar het dichtsbijzijnde geheel getal. Uw antwoord mag geen vierkantswortels of π meer bevatten.
(De figuur is niet op schaal of in verhouding.)



Antwoord = 67... m^2



$a_1 \cdot a_2 = 12$

$2(a_1 + a_2) = 16$

$c_1 \cdot c_2 = 4$

$2(c_1 + c_2) = 8$ $\qquad c_1 = a_1 \qquad d_1 = b_1$

$b_1 \cdot b_2 = 54$ $\qquad b_2 = a_2 \qquad d_2 = c_2$

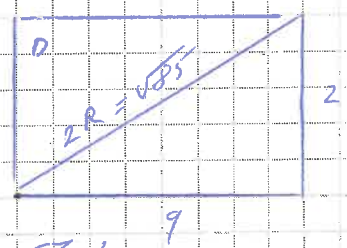
$a_2 = 3c_2$

$2(c_1 + 3c_2) = 16 \Rightarrow c_1 + 3c_2 = 8$

$2(c_1 + c_2) = 8 \Rightarrow c_1 + c_2 = 4$

$2c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = 2$

$c_1 = 2$	$c_2 = 2$
$a_1 = 2$	$a_2 = 6$
$b_1 = 9$	$b_2 = 6$
$d_1 = 9$	$d_2 = 2$



Oppervlakte $= \pi R^2 = \pi \frac{85}{4}$

$\approx 3{,}14 \cdot 85/4 \approx 66{,}7 \to 67\,m^2$

O4c Als $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 + ax - 1$; wat is dan het product van de waarden van a waarvoor $f(g(2)) = 226$?

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal. Uw antwoord mag geen vierkantswortels meer bevatten.)

Antwoord: ... -59

$g(2) = 4 + 2a - 1 = 3 + 2a \Rightarrow f(g(2)) = f(3+2a)$

$f(g(2)) = f(3+2a) = (3+2a)^2 + 1$

$= 9 + 4a^2 + 12a + 1$

$= 4a^2 + 12a + 10$

$f(g(2)) = 226 \Leftrightarrow 4a^2 + 12a + 10 = 226$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 12a - 216 = 0$

$a^2 + 3a - 54 = 0$

$a = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{2}$

$= \frac{-3 \pm 15}{2} \rightarrow$ $a_1 = -9$, $a_2 = 6$

$a_1 \cdot a_2 = -54$

O5c Als $f(x) = -\sin(x)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4$
en g de afgeleide van f.
Hoeveel bedraagt $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal. Uw antwoord mag geen wortels, π, sin, cos, en dergelijke meer bevatten.)

Antwoord : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots \frac{1}{2}$

$$g(x) = f''(x) = -\cos(x)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4 - \operatorname{sen}(x)\, 4\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\frac{1}{2}$$

$$= -\cos(x)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4 + 2\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{2}$$

O6c Bepaal a en b zodat de grafiek van de functie van $f(x) = 4x^3 - a - bx - 6$ een horizontale raaklijn bezit in $x = -\frac{1}{2}$ en in $x = \frac{1}{2}$ en een nulpunt in $x = -2$.

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal. Uw antwoord mag geen wortels meer bevatten.)

Antwoord: $a =$ -32 , $b =$ 3

Horizontale raaklijn in $x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ in $x = -\frac{1}{2}$

$f'(x) = 12x^2 - b$

$f'(-\frac{1}{2}) = 3 - b = 0 \Rightarrow b = 3$

Horizontale raaklijn in $x = \frac{1}{2}$: $f'(\frac{1}{2}) = 3 - b = 0 \Rightarrow b = 3$

nulpunt in $x = -2 \Leftrightarrow f(-2) = 0$

$f(-2) = -32 - a + 3 \cdot (-2) + 6$

$= -32 + 6 - 6 - a = 0$

$\Rightarrow a = -32$

O7c Als $y = ax + b$ de vergelijking van de rechte die gaat door het punt $(-1, -2)$ en die loodrecht staat op de rechte $3x + 2y - 5 = 0$. Bepaal a en b.

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal.)

Antwoord: $a = \ldots$ 2/3, $b = \ldots$ −4/3

$y = ax + b \iff ax - y + b = 0$

gaat door $(-1,-2) \iff -a + 2 + b = 0$ (1)

$\perp$ $3x + 2y - 5 \iff (a,-1) \cdot (3,2) = 0$

$3a - 2 = 0$

$a = 2/3$ (2)

(1) & (2) $\Rightarrow -\frac{2}{3} + 2 + b = 0$

$b = -\frac{4}{3}$

O8c $\frac{17}{3} = \int_{-1}^{1} \left(9x^3 + x^2 + 8x + 4\right)\ \mathrm{d}x - \int_{k}^{1} \left(2x^{-3}\right) \mathrm{d}x$.
Bepaal de grootste waarde van k die voldoet aan bovenstaande betrekking.

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal. Uw antwoord mag geen wortels, machten, π, sin, cos, en dergelijke meer bevatten.)

Antwoord: $k = \ldots$ $\frac{1}{2}$

$$\frac{17}{3} = \int_{-1}^{1} (9x^3 + x^2 + 8x + 4)\,dx - \int_{k}^{1} (2x^{-3})\,dx$$

$$= \left[\frac{9}{4}x^4 + \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 4x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{2}{-2}x^{-2}\right]_{k}^{1}$$

$$= \left[9/4\, x^4 + x^3/3 + 4x^2 + 4x\right]_{-1}^{1} + \left[x^{-2}\right]_{k}^{1}$$

$$= \left(9/4 + \frac{1}{3} + 4 + 4\right) - \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{3} + 4 - 4\right) + (1^{-2}) - (k^{-2})$$

$$17/3 = \frac{2}{3} + 8 + 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$17k^2 = 2k^2 + 24k^2 + 3k^2 - 3$$

$$3 = 12\,k^2$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

$$k^2 = \frac{1}{4} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Svaret: $k = \frac{1}{2}$

O9c $I = \left| \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (2\cos(kx)) \, \mathrm{d}x \right|$.

Voor welke waarde van $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ heeft I de grootste waarde?

Antwoord: $k = \ldots$ 1

$$I = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2\cos(kx))\,dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2}{k} \sin(kx) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right|$$

$$= \left| \left(\frac{2}{k} \sin\left(\frac{3k\pi}{2}\right) - \frac{2}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right|$$

$$I = \left| \frac{2}{k} \left(\sin\left(\frac{3k\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right|$$

$k = 1 \rightarrow I = \left| 2\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \right|$

$= | 2(-1 - 1) |$

$= 4$

$k = 2 \rightarrow I = \left| \frac{2}{2}\left(\sin\left(\frac{6\pi}{2}\right) - \sin(\pi)\right) \right|$

$= 0 - 0 = 0$

$k = 3 \quad I = \left| \frac{2}{3}\left(\sin\left(9\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \right|$

$= \left| \frac{2}{3} (1 - (-1)) \right|$

$= \frac{4}{3}$

$k = 4 \quad I = \left| \frac{2}{4}\left(\sin\left(\frac{12\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)\right) \right|$

$= \left| \frac{2}{4} (0 - 0) \right| = 0$

$k = 5 \quad I = \left| \frac{2}{5}\left(\sin\left(15\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(5\frac{\pi}{2}\right)\right) \right|$

$= \left| \frac{2}{5} (-1 - 1) \right|$

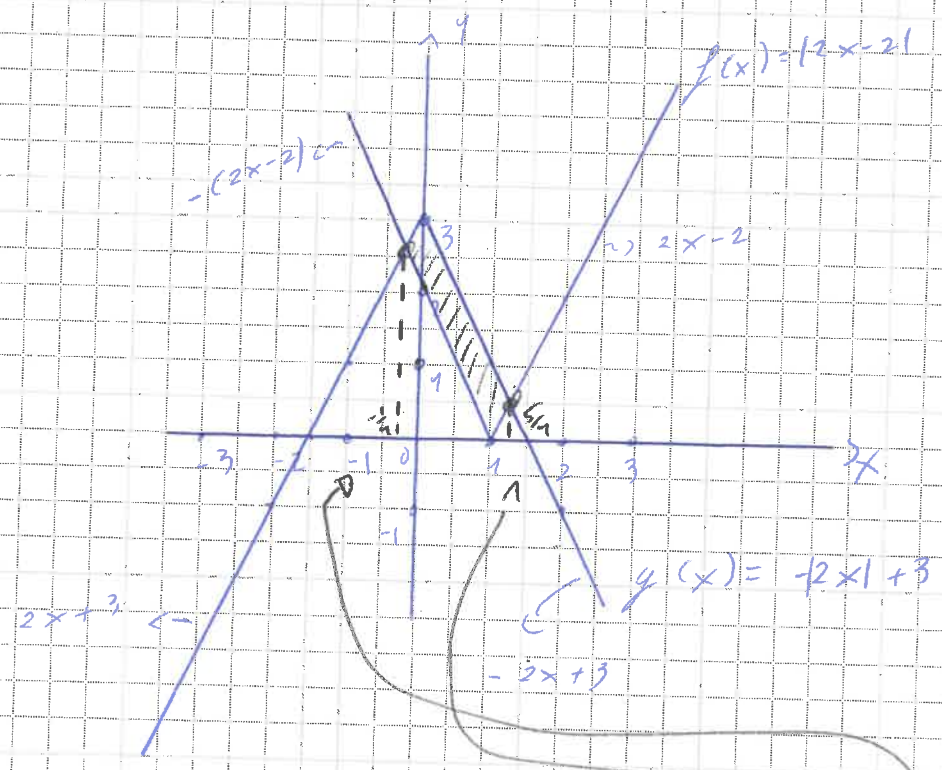
$= \frac{4}{5}$

Grootste $= 4$ voor $k = 1$

O10c Bereken de oppervlakte ingesloten tussen de grafieken van de functies $f(x) = |2x - 2|$ en $g(x) = -|2x| + 3$.

(Antwoord onder de vorm van een positieve onvereenvoudigbare breuk of een positief geheel getal.)

Antwoord: Oppervlakte = ...$5/4$



$f(x) = g(x)$ når $2x-2 = -2x+3 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

$-(2x-2) = 2x+3 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

$$\text{Overflate} = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} \big((2x+3) - (-(2x-2))\big)\,dx$$

$$+ \int_{0}^{1} \big((-2x+3) - (-(2x-2))\big)\,dx$$

$$+ \int_{1}^{\frac{5}{4}} \big((-2x+3) - (2x-2)\big)\,dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{4}}^{0} (2x+3+4x-2)\,dx + \int_{0}^{1} (-2x+3+2x+2)\,dx$$

$$+ \int_{1}^{\frac{5}{4}} (-2x+3-2x+2)\,dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{4}}^{0} (4x+1)\,dx + \int_{0}^{1} 1\,dx + \int_{1}^{\frac{5}{4}} (-4x+5)\,dx$$

$$= \left[2x^2+x\right]_{-\frac{1}{4}}^{0} + \left[x\right]_{0}^{1} + \left[-2x^2+5x\right]_{1}^{\frac{5}{4}}$$

$$= \left(0 - \left(\frac{2}{16} - \frac{1}{4}\right)\right) + (1-0) + \left(\left(-\frac{50}{16} + \frac{25}{4}\right) - (-2+5)\right)$$

$$= \frac{2}{16} + 1 + \frac{2}{16} = \frac{5}{4}$$