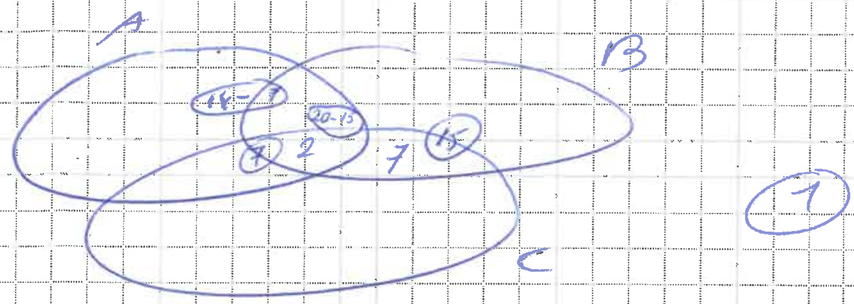
Epreuve commune 2021
Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie
Série A - Partie 2
10 Questions

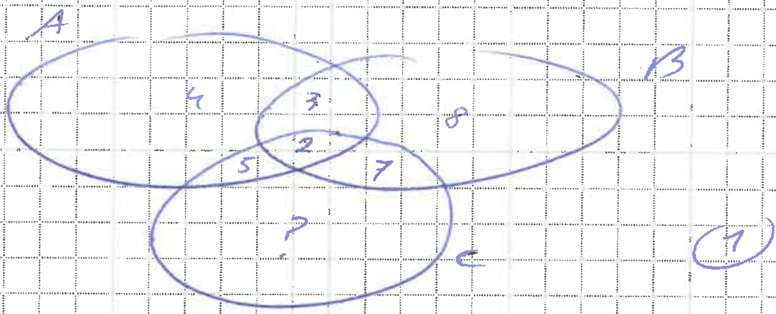
O1a 35 étudiants passent un test comportant trois questions (A, B et C). Deux élèves ont des réponses correctes à toutes les questions. Sept élèves ont une réponse correcte aux questions B et C, mais pas à la question A. Quatorze élèves ont une réponse correcte à la question A ; parmi eux, 7 ont également une réponse correcte à la question C. Vingt élèves ont une réponse correcte à la question B; quinze d'entre eux n'ont pas de réponse correcte à la question A. Un seul étudiant n'a pas de réponse correcte du tout.

Combien y a-t-il d'élèves qui ont seulement eu une réponse correcte à la question C?

Réponse: 5 . . . étudiant(s)

Total 35





Total $= 1+4+3+8+5+2+7+? = 35$

$30 + ? = 35$

$? = 5$

O2a Vous avez 9 pièces de monnaie en votre possession, dont 2 pièces de Belgique, 3 pièces des Pays-Bas et 4 pièces de France. Si vous lancez toutes les pièces en même temps et que vous n'en attrapez que deux dans chaque main, quelle est la chance que vous ayez exactement deux pièces identiques dans au moins une de vos mains ? (Chaque pièce a la même probabilité d'être attrapée.)

Arrondissez votre réponse au pourcentage entier le plus proche, donc sans décimales.

Réponse = 98 %

Il y a 4 pièces de France (F)
3 des Pays-Bas (N)
2 de Belgique (B)

Nous considérons toutes les permutations de F F F F N N N B B et retenons les deux premiers (première main) et les deux suivants éléments (deuxième main). Si $\times$ représente un élément quelconque et $\not B$ une pièce non belge (etc.) alors les "bonnes" combinaisons sont:

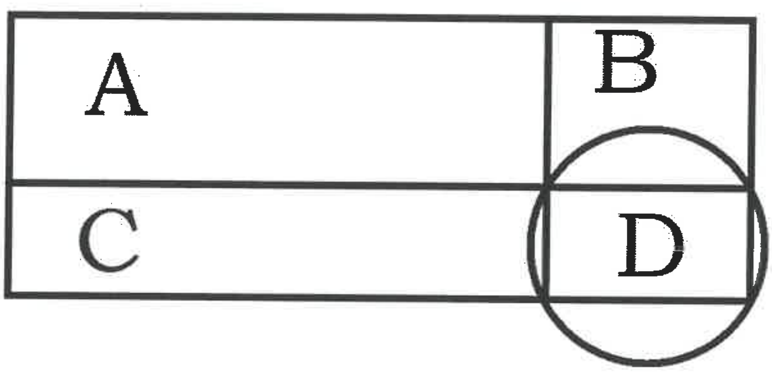
F F	$\times\times$	$\times\times\times\times\times$	avec probabilité $\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} = 12/72$
N N	$\times\times$	$\times\times\times\times\times$	$\frac{3}{9}\,\frac{2}{8} = 6/72$
B B	$\times\times$	$\times\times\times\times\times$	$\frac{2}{9}\,\frac{1}{8} = 2/72$
N B	F F	$\times\times\times\times\times$	$\frac{3}{9}\,\frac{2}{8}\,\frac{4}{7}\,\frac{3}{6} = 72/3024$
B N	F F	$\times\times\times\times\times$	$\frac{2}{9}\,\frac{3}{8}\,\frac{4}{7}\,\frac{3}{6} = 72/3024$
$\not F$ F	F F	$\times\times\times\times\times$	$\frac{5}{9}\,\frac{4}{8}\,\frac{3}{7}\,\frac{2}{6} = 120/3024$
F $\not F$	F F	$\times\times\times\times\times$	$\frac{4}{9}\,\frac{5}{8}\,\frac{3}{7}\,\frac{2}{6} = 120/3024$
F B	N N	$\times\times\times\times\times$	$\frac{4}{9}\,\frac{2}{8}\,\frac{3}{7}\,\frac{2}{6} = 48/3024$
B F	N N	$\times\times\times\times\times$	$\frac{2}{9}\,\frac{4}{8}\,\frac{3}{7}\,\frac{2}{6} = 48/3024$
$\not N$ N	N N	$\times\times\times\times\times$	$\frac{6}{9}\,\frac{3}{8}\,\frac{2}{7}\,\frac{1}{6} = 36/3024$
N $\not N$	N N	$\times\times\times\times\times$	$\frac{3}{9}\,\frac{6}{8}\,\frac{2}{7}\,\frac{1}{6} = 36/3024$
N F	B B	$\times\times\times\times\times$	$\frac{3}{9}\,\frac{4}{8}\,\frac{2}{7}\,\frac{1}{6} = 24/3024$
F N	B B	$\times\times\times\times\times$	$\frac{4}{9}\,\frac{3}{8}\,\frac{2}{7}\,\frac{1}{6} = 24/3024$
$\not B$ B	B B	$\times\times\times\times\times$	$\frac{7}{9}\,\frac{2}{8}\,\frac{1}{7}\,\frac{0}{7} = 0$
B $\not B$	B B	$\times\times\times\times\times$	$\frac{2}{9}\,\frac{7}{8}\,\frac{1}{7}\,\frac{0}{7} = 0$

Probabilité totale $= \dfrac{12+6+2}{72} + \dfrac{72+72+120+120+48+48+36+36+24+24}{3024}$

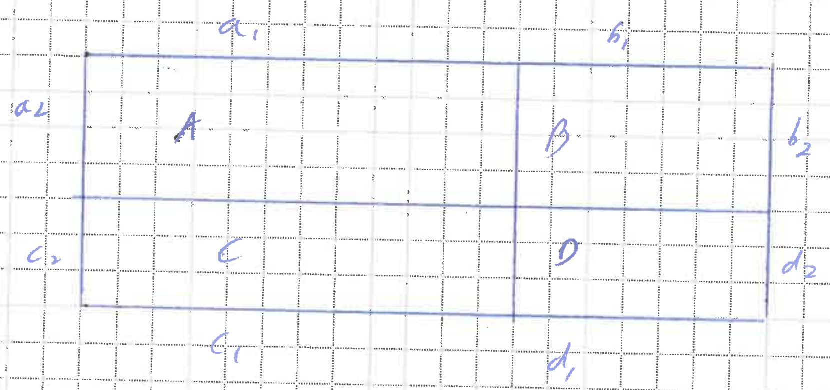
$\approx 0{,}278 + 0{,}198 \approx 0{,}476 \approx 48\%$

O3a Nous divisons un rectangle en quatre petits rectangles, comme le montre la figure ci-dessous.

Si le rectangle A a une superficie de 6 m^2 et un périmètre de 10 m, le rectangle B a une superficie de 10 m^2 et le rectangle C a une superficie de 12 m^2 et un périmètre de 14 m, alors quelle est la superficie du plus grand cercle qui passe par les 4 sommets du rectangle D ? Donnez votre réponse, exprimée en mètres carrés, arrondie au nombre entier le plus proche. Votre réponse ne doit pas contenir de racines carrées ou de π. (La figure n'est pas à l'échelle.)



Réponse = 32 m^2



$a_1 \cdot a_2 = 6$

$2(a_1 + a_2) = 10$

$c_1 \cdot c_2 = 12$

$2(c_1 + c_2) = 14$

$b_1 \cdot b_2 = 10$

$c_1 = a_1$ $\quad d_1 = b_1$

$b_2 = a_1$ $\quad d_2 = c_2$

$a_2 = \frac{1}{2} c_2$

$2(c_1 + c_2) = 14 \Rightarrow c_1 + c_2 = 7$

$2(c_1 + \frac{1}{2} c_2) = 10 \Rightarrow 2c_1 + c_2 = 10$

$c_1 = 3$

$c_1 = 3 \quad c_2 = 4$
$a_1 = 3 \quad a_2 = 2$
$b_1 = 5 \quad b_2 = 2$
$d_1 = 5 \quad d_2 = 4$

Superficie $= \pi R^2 = \pi \frac{41}{4}$

$\approx 3{,}14 \cdot \frac{41}{4} \approx 32{,}2 \to 32\ m^2$

O4a Soient $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 + ax - 1$; alors quelle est la plus grande valeur de a pour laquelle $f(g(2)) = 226$?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines carrées.)

Réponse: $a = \ldots$ 6

$g(2) = 4 + 2a - 1 = 3 + 2a$

$f(g(2)) = f(3+2a) = (3+2a)^2 + 1$

$= 9 + 4a^2 + 12a + 1$

$= 4a^2 + 12a + 10$

$f(g(2)) = 226 \Leftrightarrow 4a^2 + 12a + 10 = 226$

$\Leftrightarrow 4a^2 + 12a - 216 = 0$

$a^2 + 3a - 54 = 0$

$a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{225}}{2}$

$a = \dfrac{-3 \pm 15}{2}$ $a_1 = -9$, $a_2 = 6$

La plus grande : $a_2 = 6$

O5a Soient $f(x) = -\cos(x)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4$
et g la dérivée de f.
Combien vaut $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines carrées, π, sin, cos, etc.)

Réponse : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots$ $\frac{1}{4}$

$$g(x) = f'(x) = \sin(x)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4 - \cos(x)\, 4\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \sin(x)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4 - 2\cos(x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 0$$

$$= \frac{1}{4}$$

O6a Déterminez a et b de sorte que le graphique de la fonction de $f(x) = 2x^3 + a + bx + 4$ ait une tangente horizontale en $x = -2$ et en $x = 2$ et un zéro en $x = 3$.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines carrées.)

Réponse: $a = \ldots$ 14, $b = \ldots$ -24

Tangente horizontale en $x=-2$

$\Leftrightarrow f'(x)=0$ en $x=-2$

$f'(x) = 6x^2 + b$

$f'(-2) = 24 + b = 0 \Rightarrow b = -24$

Tangente horizontale en $x=2$

$\Leftrightarrow f'(2) = 24 + b = 0 \Rightarrow b = -24$

Zéro en $x=3 \Rightarrow f(3)=0$

$f(3) = 54 + a + (-24)\cdot 3 + 4$

$= 54 - 72 + 4 + a = 0$

$\Rightarrow a = 14$

O7a Soit $y = ax + b$ l'équation d'une droite passant par le point $(-1, 2)$ et qui est perpendiculaire à la droite $2x + 3y - 5 = 0$. Déterminez a et b.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier.)

Réponse: $a = \ldots$ 3/2, $b = \ldots$ 7/2

$y = ax + b \iff ax - y + b = 0$

passe par $(-1, 2) \iff -a - 2 + b = 0$ (1)

$\perp\ 2x + 3y - 5 \iff (a, -1) \cdot (2, 3) = 0$

$2a - 3 = 0$

$a = \frac{3}{2}$ (2)

(1) & (2) $\Rightarrow -\frac{3}{2} - 2 + b = 0$

$b = \frac{7}{2}$

O8a $\frac{13}{2} = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x + 4\right)\ \mathrm{d}x - \int_{k}^{1} \left(x^{-3}\right) \mathrm{d}x$.

Déterminez la plus grande valeur de k qui respecte la relation ci-dessus.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible ou d'un nombre entier. Votre réponse ne peut plus contenir de racines, puissances, π, sin, cos, etc.)

Réponse: $k = \ldots$ 1/2

$$\frac{13}{2} = \int_{-1}^{1} (x^3 - 2x + 4)\,dx - \int_{k}^{1} (x^{-3})\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + 4x\right]_{-1}^{1} - \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_{k}^{1}$$

$$= \left[x^4/4 - x^2 + 4x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{2}x^{-2}\right]_{k}^{1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{4} - 1 + 4\right) - \left(\tfrac{1}{4} - 1 - 4\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{2}k^{-2}\right)$$

$$\frac{13}{2} = 8 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2k^2}$$

$$13 = 16 + 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$13k^2 = 16k^2 + k^2 - 1$$

$$1 = 4k^2$$

$$k^2 = \frac{1}{4} \quad \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Plus grande : $k = \frac{1}{2}$

O9a $I = \int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin(kx))\ \mathrm{d}x$.

Pour quelle valeur de $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, la valeur I atteint-elle la plus petite valeur strictement positive?

Réponse: $k = \ldots$ 5

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} (2\sin(kx))\,dx$$

$$= \left[-\frac{2}{k}\cos(kx)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{k}\left(\cos(k\pi) - \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right)$$

$k=1 \to I = -\frac{2}{1}(-1-0) = 2$

$k=2 \to I = -\frac{2}{2}(1-(-1)) = -2$

$k=3 \to I = -\frac{2}{3}(-1-0) = \frac{2}{3}$

$k=4 \to I = -\frac{2}{4}(1-1) = 0$

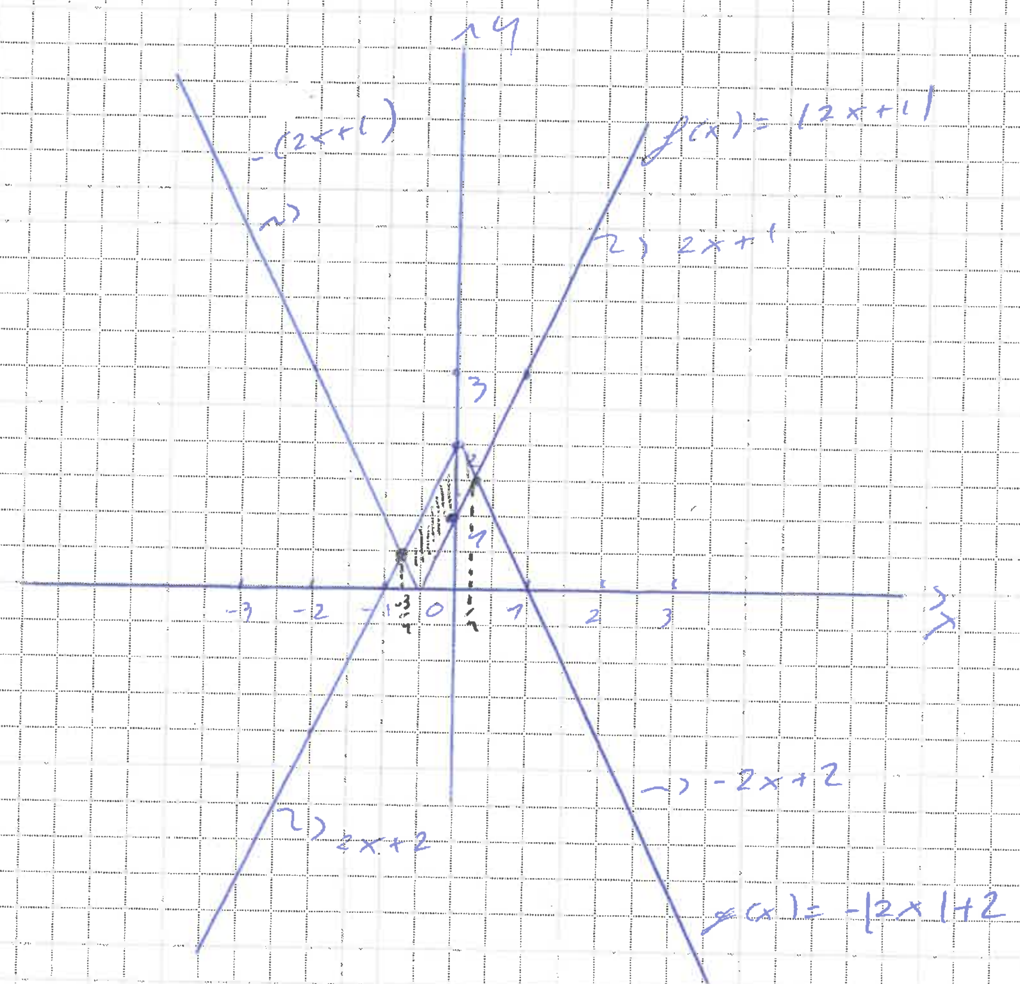
$k=5 \to I = -\frac{2}{5}(-1-0) = \frac{2}{5}$

Plus petite valeur strictement positive $= \frac{2}{5}$
pour $k=5$

O10a Calculer la superficie comprise entre les graphiques des fonctions
$f(x) = |2x + 1|$ et $g(x) = -|2x| + 2$.

(Réponse sous la forme d'une fraction irréductible positive ou d'un nombre entier positif.)

Réponse: Surface = ... 3/4



$f(x) = g(x)$ si $\quad -(2x+1) = 2x+2 \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

$\qquad\qquad 2x+1 = -2x+2 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$$\text{Superficie} = \int_{-\frac{3}{4}}^{-\frac{1}{2}} \Big((2x+2) - \big(-(2x+1)\big)\Big)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \big((2x+2) - (2x+1)\big)\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{4}} \big((-2x+2) - (2x+1)\big)\,dx$$

$$= \int_{-\frac{3}{4}}^{-\frac{1}{2}} (4x+3)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 1\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{4}} (-4x+1)\,dx$$

$$= \left[2x^2+3x\right]_{-\frac{3}{4}}^{-\frac{1}{2}} + \left[x\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left[-2x^2+x\right]_{0}^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left(\left(\frac{2}{4} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{4}\right)\right) + \left(0 + \frac{1}{2}\right) + \left(\left(-\frac{2}{16} + \frac{1}{4}\right) - 0\right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$