Gemeenschappelijke proef 2020
Algebra - Analyse - Meetkunde - Goniometrie
Reeks C - Deel 2
10 Vragen

O1c U heeft 40 dozen. Twee dozen bevatten een bal, een pet en een touw. Zes dozen bevatten een bal en een pet, maar geen touw. Tien dozen bevatten een touw; hiervan bevatten er vijf ook een pet. Twaalf dozen bevatten een bal; hiervan bevatten er zeven geen touw.

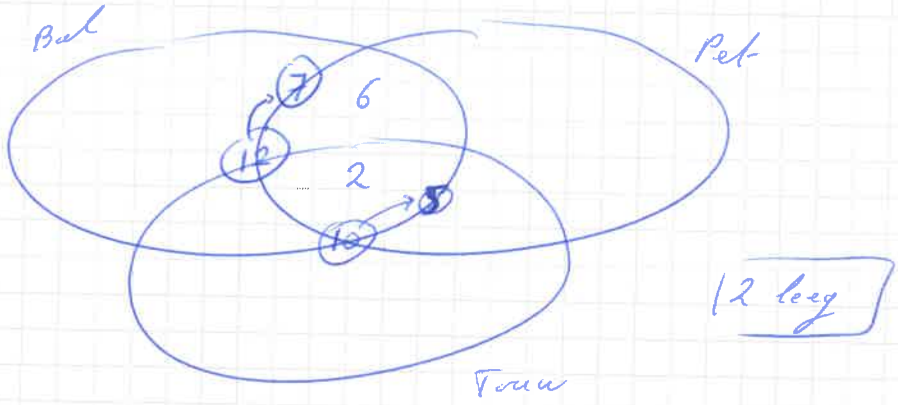
Twee dozen zijn leeg.

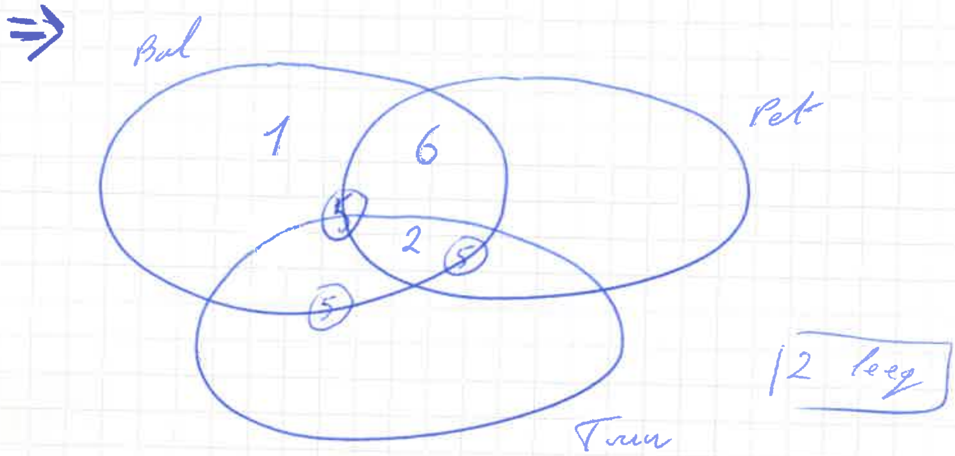
Er kunnen geen andere voorwerpen in de dozen liggen dan een bal, een pet of een touw.

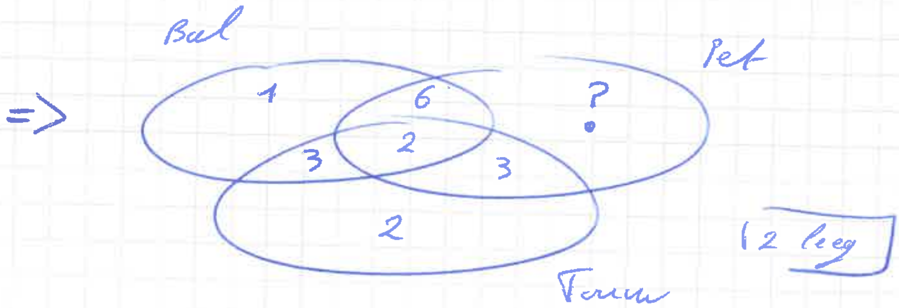
Wat is het aantal dozen die een pet bevatten, maar geen bal en geen touw?

Antwoord: 21 dozen

Gegevens : Totaal 40







Totaal $= 1 + 6 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 + ? = 40$

$\Rightarrow \quad ? = 21$

O2c U heeft 12 muntstukken in uw bezit, waarvan 3 muntstukken uit België zijn, 3 muntstukken uit Nederland zijn en 6 muntstukken uit Frankrijk zijn. Indien u alle muntstukken tegelijkertijd opgooit en er maar vier opvangt, wat is dan de kans dat u exact drie muntstukken uit België heeft? (Elk individueel muntstuk heeft dezelfde waarschijnlijkheid om opgevangen te worden.)

Rond uw antwoord af tot het dichtsbijzijnde geheel percent, dus zonder cijfers na de komma.

Antwoord = 2 . . %

Er zijn 3 Belgische muntstukken (B)
en 9 andere muntstukken (A)

We beschouwen alle permutaties van
BBB AAAAAAAAA
en weerhouden daarvan de eerste 4 elementen.

De "goede" worpen hebben volgende mogelijkheden
van die 4 elementen

BBBA met kans $\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{9}{9} = \frac{1}{220}$

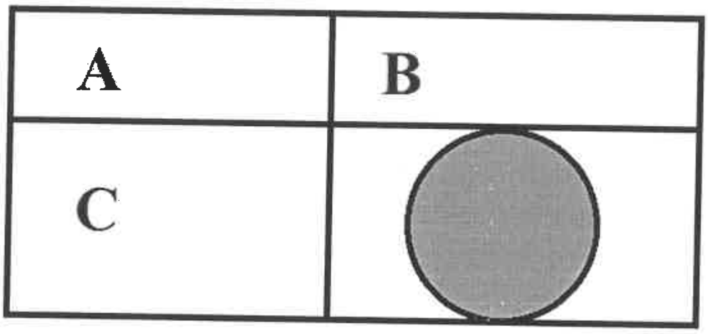
BBAB $\frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{220}$

BABB $\frac{3}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{220}$

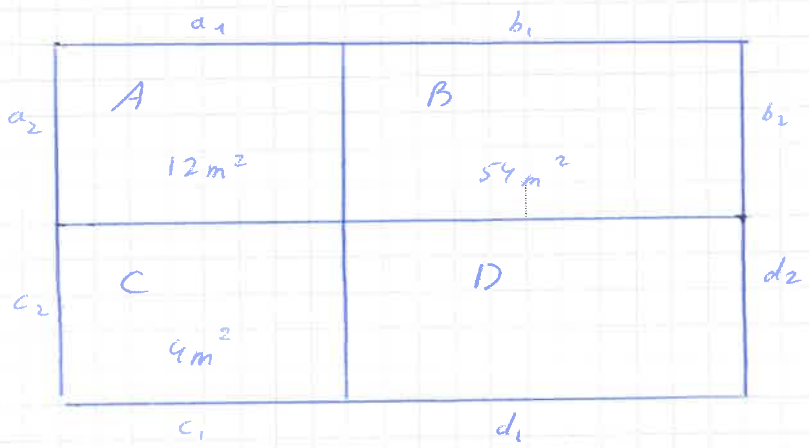
ABBB $\frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{220}$

Totale kans : $4 \cdot \frac{1}{220} = 0{,}01818\ldots \approx 2\,\%$

O3c We verdelen een rechthoek in vier kleinere rechthoeken, zoals aangegeven op de figuur hieronder. Als rechthoek A een oppervlakte heeft van 12 m^2 en een omtrek van 16 m, rechthoek B een oppervlakte heeft van 54 m^2 en rechthoek C een oppervlakte heeft van 4 m^2 en een omtrek van 8 m, wat is dan de omtrek van de grootste cirkel (grijs op de figuur) die volledig in de rechthoek rechtsonder ligt ? Geef uw antwoord, uitgedrukt in meter, afgerond naar het dichtstbijzijnde geheel getal.
(De figuur is niet op schaal.)



Antwoord = ... m



$a_1 \cdot a_2 = 12$

$2(a_1 + a_2) = 16$

$c_1 \cdot c_2 = 4$

$2(c_1 + c_2) = 8$ $\quad c_1 = a_1 \quad d_1 = b_1$

$b_1 \cdot b_2 = 54$ $\quad b_2 = a_2 \quad d_2 = c_2$

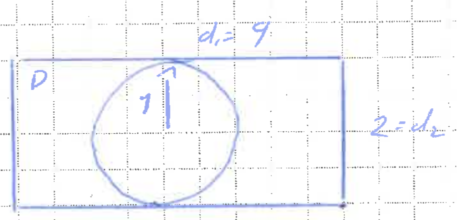
$a_2 = 3c_2$

$2(c_1 + 3c_2) = 16 \Rightarrow c_1 + 3c_2 = 8$

$2(c_1 + c_2) = 8 \Rightarrow c_1 + c_2 = 4$

$2c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = 2$

$\Rightarrow c_1 = 2, \quad c_2 = 2$
$a_1 = 2, \quad a_2 = 6$
$b_1 = 9, \quad b_2 = 6$
$d_1 = 9, \quad d_2 = 2$



omtrek cirkel $= 2\pi \cdot 1 = 6{,}28 \approx 6$ m

O4c We wijzigen een vierkant door twee evenwijdige zijden ervan 30% langer te maken en twee andere 30% korter, en wel op deze manier dat de bekomen figuur een rechthoek vormt. Met hoeveel % is de oppervlakte van deze rechthoek dan groter of kleiner dan die van het oorspronkelijk vierkant ? Antwoord in percenten, afgerond tot één cijfer na de komma.

Antwoord = .9.. % kleiner/~~groter~~ (schrappen wat niet past).

Oorspronkelijk $L \cdot H$

Na aanpassing $(1{,}3\,L) \cdot (0{,}7\,H)$

Verhouding $\dfrac{(1{,}3 \cdot 0{,}7)\,L \cdot H}{L \cdot H} = 0{,}91 = 91\%$

$\Rightarrow$ 9% kleiner

O5c Zij $f(x) = -x^2 - 6x + 8$, $g(x) = -2x - 1$. Hoeveel bedraagt $f(g(3))$?

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal.)

Antwoord: $f(g(3)) = \ldots 1$

$g(3) = -2 \cdot 3 - 1 = -7 \Rightarrow f(g(3)) = f(-7)$

$f(g(3)) = -(-7)^2 - 6 \cdot (-7) + 8 = -49 + 42 + 8$

$= 1$

O6c Zij $f(x) = -\frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4$
en g de afgeleide van f.
Hoeveel bedraagt $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal.)

Antwoord : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots$ 1/3

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 4\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{8}{6}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= +\frac{4}{3}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3\left(+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\frac{4}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{4}{3} \quad \frac{2\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{16} = \frac{1}{3}$$

O7c Bepaal a en b zodat de grafiek van de functie van $f(x) = ax^2+bx+3$ een horizontale raaklijn bezit in $x = -2$ en een nulpunt in $x = -1$.

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal.)

Antwoord: $a = \dots$ 1, $b = \dots$ 4

$f(x) = ax^2 + bx + 3$

$f(-1) = 0 \iff a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3 = 0$

$a - b + 3 = 0$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(-2) = 0 \iff 2a(-2) + b = 0$

$-4a + b = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a - b = -3 \\ -4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$

O8c Zij $y = ax + b$ de vergelijking van de rechte die gaat door het punt $(2, -3)$ en die loodrecht staat op de rechte $-x + 3y - 4 = 0$. Bepaal a en b.

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal.)

Antwoord: $a = \ldots$ -3, $b = \ldots$ 3

$y = ax + b \Leftrightarrow ax - y + b = 0$

gaat door $(2,-3) \Leftrightarrow -3 = 2a + b$ ①

$\perp$ $-x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow (a,-1) \cdot (-1,3) = 0$

$-a - 3 = 0$

$\boxed{a = -3}$ ②

② in ① : $-3 = -6 + b$

$\boxed{b = 3}$

O9c $k = \int_{-\pi/8}^{\pi} (4\cos(4x))\ \mathrm{d}x - \int_1^2 (6x^{-4})\,\mathrm{d}x$.
Bepaal k.

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal.)

Antwoord: $k = \ldots$ $-3/4$

$$k = \int_{-\pi/8}^{\pi} (4 \cos(4x))\,dx - \int_{1}^{2} (6 x^{-4})\,dx$$

$$= \left[\operatorname{sen} 4x \right]_{-\frac{\pi}{8}}^{\pi} - \left[6 \frac{x^{-3}}{-3} \right]_{1}^{2}$$

$$= \left(\operatorname{sen} 4\pi - \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right) - \left(-2(2)^{-3} + 2(1)^{-3} \right)$$

$$= (0 + 1) - \left(\frac{-2}{8} + 2 \right)$$

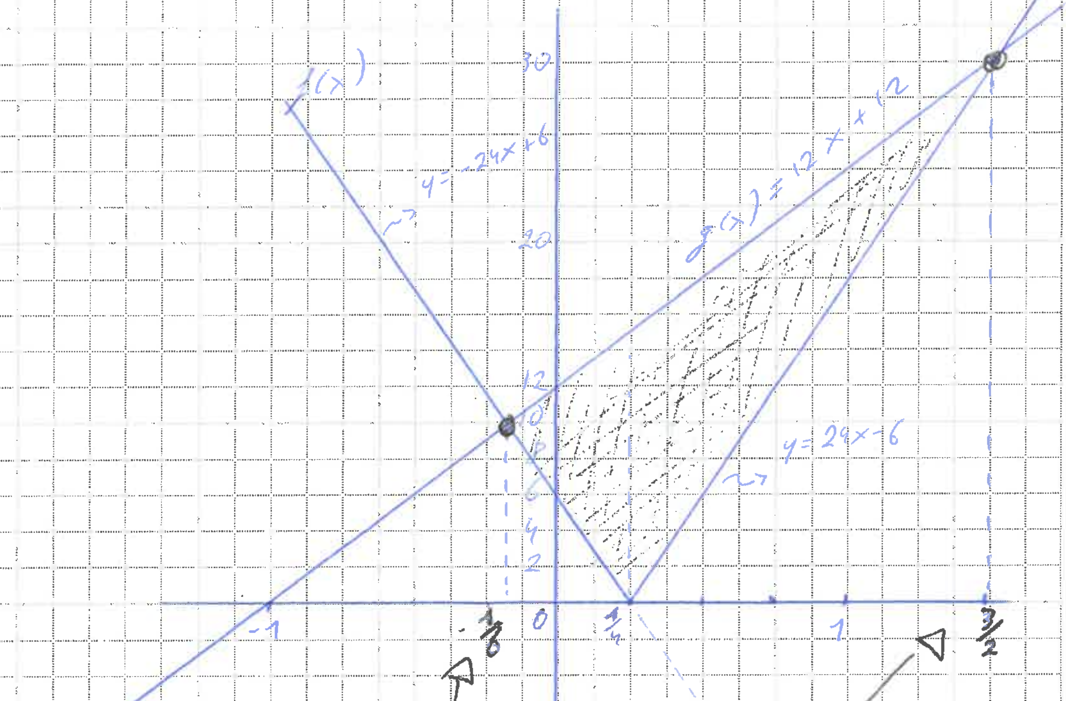
$$= +1 + \frac{1}{4} - 2$$

$$k = -\frac{3}{4}$$

O10c Bereken de oppervlakte ingesloten tussen de grafieken van de functies $f(x) = |-24x + 6|$ en $g(x) = 12x + 12$.

(Antwoord onder de vorm van een onvereenvoudigbare breuk of een geheel getal.)

Antwoord: Oppervlakte = ... $25/2$



$f(x) = g(x)$

als $x = -\frac{1}{6}$

$x = \frac{3}{2}$

Oppervlakte $= \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}} \left((12x+12) - (-24x+6)\right) dx$

$+ \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} \left((12x+12) - (24x-6)\right) dx$

$= \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}} (36x+6)\, dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}} (-12x+18)\, dx$

$= \left[18x^2 + 6x\right]_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{4}} + \left[-6x^2 + 18x\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{2}}$

$= \left(\frac{18}{16} + \frac{6}{4}\right) - \left(\frac{18}{36} - \frac{6}{6}\right) + \left(-\frac{54}{4} + \frac{54}{2}\right) - \left(-\frac{6}{16} + \frac{18}{4}\right)$

$= 25/2$