Epreuve commune 2020
Algèbre - Analyse - Géométrie - Trigonométrie
Série B - Partie 2
10 Questions

O1b Votre unité logistique emploie 32 personnes.

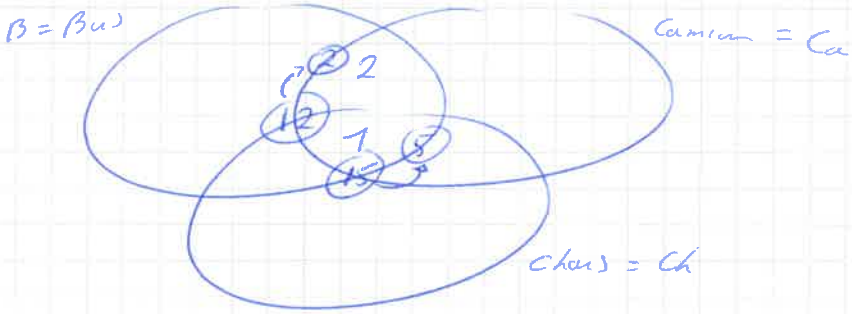
Combien de personnes dans votre unité logistique sont à la fois non qualifiées sur bus et non qualifiées sur char ?

Une personne seule possède un permis de conduire pour les bus, les camions et les chars. Deux personnes ont un permis pour les bus et les camions, mais pas pour les chars. Quinze personnes ont un permis de conduire pour les chars, cinq d'entre elles ont également un permis de conduire pour les camions. Douze personnes ont un permis de conduire pour les bus ; deux d'entre elles n'ont pas de permis de conduire pour les chars.

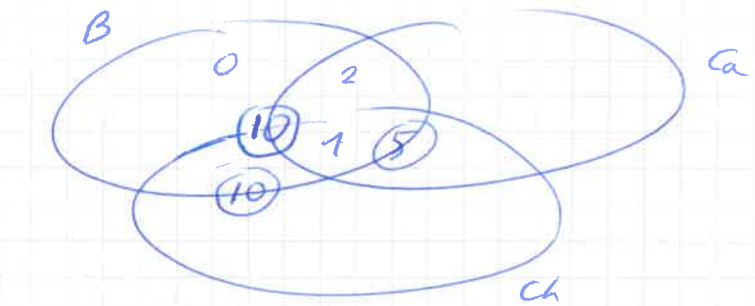
Combien de personnes dans votre unité logistique n'ont pas de permis de conduire ni pour les bus ni pour les chars ?

Réponse: 15 personnes

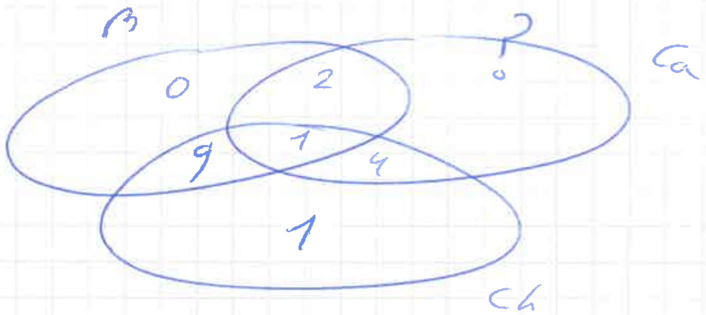
On donne : Total 32



=>



=>



Total $= 0+2+9+1+4+1+? = 32$

$\Rightarrow ? = 15$

O2b Vous avez 12 pièces de monnaie en votre possession, dont 5 pièces de Belgique, 3 pièces des Pays-Bas et 4 pièces de France. Si vous lancez toutes les pièces en même temps et que vous n'en rattrapez que quatre, quelle est la probabilité que vous ayez exactement trois pièces de Belgique ? (Chaque pièce a la même probabilité d'être collectée).

Arrondissez votre réponse au pourcentage entier le plus proche, c'est-à-dire sans décimales.

Réponse = ..14.. %

Il y a 5 pièces belges (B)
et 7 autres pièces (A)

Nous considérons toutes les permutations
de BBBBB AAAAAAA
et nous en retenons celles pour lesquelles
les quatres premiers éléments correspondent à

BBBA avec probabilité $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{198}$

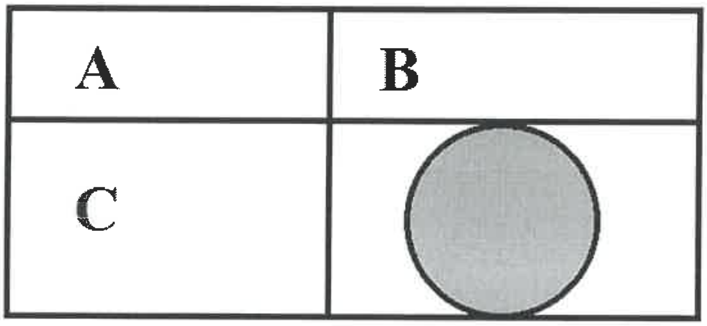
BBAB $\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{198}$

BABB $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{198}$,

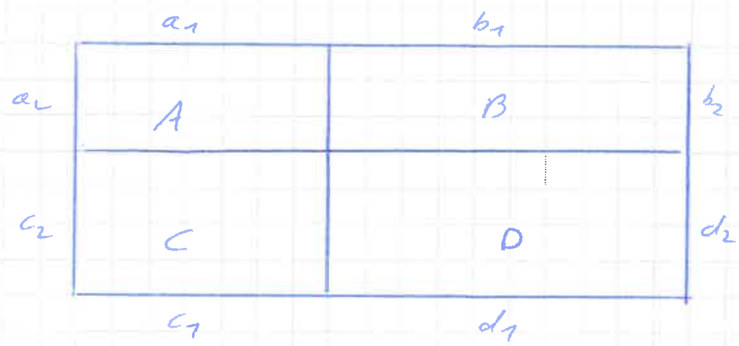
ABBB $\frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{198}$,

Probabilité totale $= 4 \cdot \frac{7}{198} = \frac{28}{198} = 0{,}141\ldots \simeq 14\%$

O3b Nous divisons un rectangle en quatre petits rectangles, comme le montre la figure ci-dessous. Si le rectangle A a une superficie de 18 m^2 et une périmètre de 18 m, le rectangle B a une superficie de 42 m^2 et le rectangle C a une superficie de 15 m^2 et une périmètre de 16 m, quelle est donc la circonférence du plus grand cercle (en gris sur la figure) se trouvant entièrement dans le rectangle inférieur droit ? Donnez votre réponse, exprimée en mètres, arrondie au nombre entier le plus proche. (La figure n'est pas à l'échelle.)



Réponse = 16 m



$$a_1 \cdot a_2 = 18$$
$$2(a_1 + a_2) = 18$$
$$c_1 \cdot c_2 = 15$$
$$2(c_1 + c_2) = 16$$
$$b_1 \cdot b_2 = 42$$

$c_1 = a_1 \qquad d_1 = b_1$

$b_2 = a_2 \qquad d_2 = c_2$

$$\frac{a_2}{c_2} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} \Rightarrow a_2 = \frac{6}{5} c_2$$

$$2\left(c_1 + \frac{6}{5} c_2\right) = 18 \Rightarrow c_1 + \frac{6}{5} c_2 = 9$$

$$c_1 + c_2 = 8$$

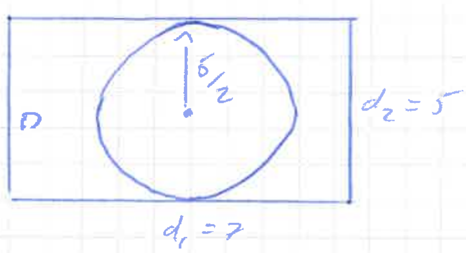
$$\frac{1}{5} c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 5$$

$\Rightarrow c_1 = 3 \qquad c_2 = 5$

$a_1 = 3 \qquad a_2 = 6$

$b_1 = 7 \qquad b_2 = 6$

$d_1 = 7 \qquad d_2 = 5$



Circonférence $= 2\pi \cdot \frac{5}{2} = 5\pi = 15{,}7\ldots \approx 16$ m

O4b On change un rectangle en rendant son côté long 20 % plus long et son côté court 10 % plus court. De combien de % la surface de ce rectangle augmentera-t-elle ou diminuera-t-elle ? Réponse en pourcentage, arrondie à une décimale près.

Réponse = 8.. % ~~plus petit~~/plus grand (Biffer la mention inutile.)

A l'origine $L \cdot H$

Après modification $(1{,}2 \cdot L) \cdot (0{,}9 \cdot H)$

Rapport $\frac{(1{,}2 \cdot 0{,}9)\ L \cdot H}{L \cdot H} = 1{,}08 = 108\,\%$

$\Rightarrow$ 8% plus grand

O5b Soit $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$, $g(x) = 2x + 1$. Combien vaut $f(g(2))$?

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $f(g(2)) = \ldots$ -41

$$g(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow f(g(2)) = f(5)$$

$$f(g(2)) = -2(5)^2 + 2 \cdot 5 - 1 = -50 + 10 - 1$$

$$= -41$$

O6b Soit $f(x) = -2\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^6$
et g la dérivée de f.
Combien vaut $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ldots$ 3/4

$$f'(x) = -2 \cdot 6\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^5 \cdot \left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 6 \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^5 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6$$

$$= 6 \quad \frac{8}{64} = \frac{3}{4}$$

O7b Déterminez a et b de sorte que le graphique de la fonction de $f(x) = 3x^2 - a + bx + 4$ ait une tangente horizontale en $x = 1$ et un zéro en $x = -1$.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $a = \ldots$ 13, $b = \ldots$ -6

$$f(-1) = 0 \iff 3(-1)^2 - a + b(-1) + 4 = 0$$

$$3 - a - b + 4 = 0$$

$$+a + b = 7 \qquad (1)$$

$$f'(x) = 6x + b$$

$$f'(1) = 0 \iff 6 \cdot 1 + b = 0$$

$$\boxed{b = -6} \qquad (2)$$

$$(2) \to (1) \qquad a - b = 7$$

$$a - 6 = 7$$

$$\boxed{a = 13}$$

O8b Soit $y = ax + b$ l'équation d'une droite qui passe par le point $(1, -2)$ et qui est perpendiculaire à la droite $-2x + 3y - 4 = 0$. Déterminez a et b.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $a = \frac{-3}{2}$, $b = \frac{-1}{2}$

$y = ax + b \Rightarrow ax - y + b = 0$

passe par $(1,-2) \Leftrightarrow a \cdot 1 - (-2) + b = 0$

$a + 2 + b = 0$ (1)

$\perp$ à $-2x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow (a,-1) \cdot (-2,3) = 0$

$-2a - 3 = 0$

$\boxed{a = \frac{-3}{2}}$ (2)

(2) $\to$ (1) $\frac{-3}{2} + 2 + b = 0$

$\boxed{b = \frac{-1}{2}}$

O9b $k = \int_{-\pi/4}^{\pi} (-3\cos(2x))\ \mathrm{d}x - \int_1^3 \left(3x^{-2}\right) \mathrm{d}x$.

Déterminez k.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: $k = \ldots$ $-7/2$

$$k = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} (-3\cos(2x))\,dx - \int_{1}^{3} (3x^{-2})\,dx$$

$$= \left[\frac{-3}{2}\,\text{sen}(2x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \left[\frac{3x^{-1}}{-1}\right]_{1}^{3}$$

$$= \left[-\frac{3}{2}\,\text{sen}(2x)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} + \left[\frac{3}{x}\right]_{1}^{3}$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\,\text{sen}(2\pi) + \frac{3}{2}\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{3}{3} - \frac{3}{1}\right)$$

$$= \left(0 - \frac{3}{2}\right) + (1 - 3)$$

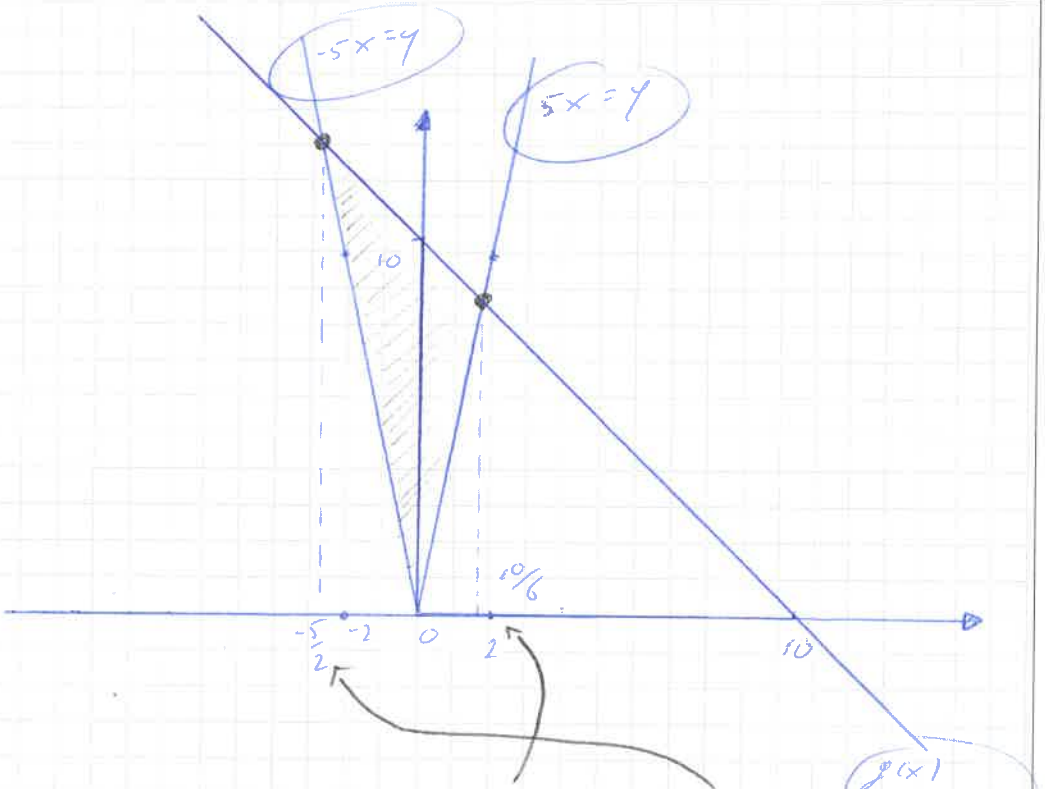
$$-\frac{3}{2} - 2$$

$$k = -\frac{7}{2}$$

O10b Calculez la surface comprise entre les graphiques des fonctions $f(x) = |5x|$ et $g(x) = -x + 10$.

(Réponse sous forme de fraction irréductible ou d'entier.)

Réponse: Surface = ... $125/6$



$f(x) = g(x) \iff x = \frac{10}{6}$ ou $x = -\frac{5}{2}$

$$\text{Surface} = \int_{-\frac{5}{2}}^{0} \left((-x+10) - (-5x)\right) dx$$

$$+ \int_{0}^{\frac{10}{6}} \left((-x+10) - (5x)\right) dx$$

$$= \int_{-\frac{5}{2}}^{0} (4x+10)\,dx + \int_{0}^{\frac{10}{6}} (-6x+10)\,dx$$

$$= \left[2x^2 + 10x\right]_{-\frac{5}{2}}^{0} + \left[-3x^2 + 10x\right]_{0}^{\frac{10}{6}}$$

$$= (0) - \left(\frac{50}{4} - \frac{50}{2}\right) + \left(\frac{-300}{36} + \frac{100}{6}\right) - (0)$$

$$= \frac{25}{2} + \frac{50}{6} = \frac{125}{6}$$