

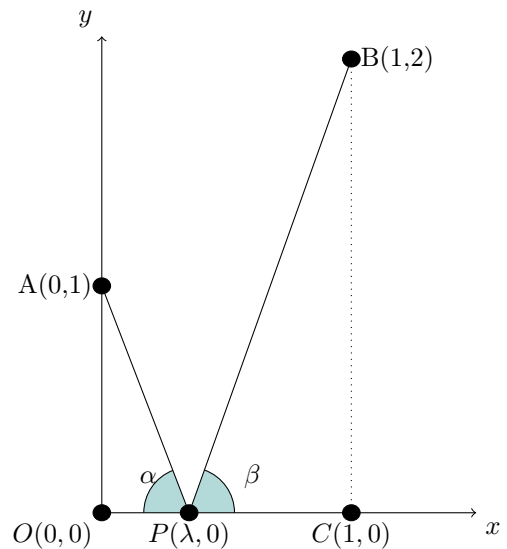
1. Werk verzorgd, leg de redenering duidelijk uit en geef de berekeningen in detail weer.
2. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
3. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers mogen wel worden gebruikt.
4. Laat in uw antwoorden getallen zoals π , e , $\ln 2$ en $\sqrt{3}$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	Totaal
Punten	5	4	5	6	20

Vraag 1 _____ 5 punten

In het vlak zijn de vaste punten $A(0,1)$ en $B(1,2)$ gegeven en een variabel punt $P(\lambda,0)$ met $0 < \lambda < 1$, zoals weergegeven in de figuur hiernaast.

Wat is het verband tussen de hoek $\alpha = \widehat{APO}$ en de hoek $\beta = \widehat{CPB}$ wanneer de lengte $|AP| + |PB|$ minimaal is?



Vraag 2 _____ 4 punten

Voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ is de functie f_n gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{1+2x} \sqrt[4]{1+4x} \sqrt[6]{1+6x} \dots \sqrt[2n]{1+2nx}}{\sqrt[3]{1+3x} \sqrt[5]{1+5x} \sqrt[7]{1+7x} \dots \sqrt[2n+1]{1+(2n+1)x}}.$$

- (1 punt) Bereken de afgeleide van f_1 in $x = 0$.
- (1 punt) Bereken de afgeleide van f_2 in $x = 0$.
- (2 punten) Bereken de afgeleide van f_{100} in $x = 0$.
Merk op dat voor een positieve functie f geldt: $f = e^{\ln f}$.

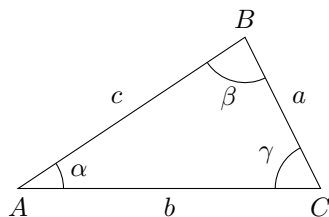
Vraag 3 _____ 5 punten

- (2 punten) Ontbind in partieelbreuken $\frac{1}{(t^2+1)(2t+1)}$.
- (3 punten) Bereken $\int \frac{2 \tan(x) - 1}{2 \tan(x) + 1} dx$ beginnend met de substitutie $t = \tan(x)$.

Vraag 4 **6 punten**

In de onderstaande driehoek ABC kent men de grootte van de hoek bij A en de verhouding van de lengtes van de zijden $[AC]$ en $[AB]$:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{en} \quad \frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}.$$



- (a) (4 punten) Bereken $\tan \frac{\beta - \gamma}{2}$. U mag de sinusregel gebruiken.
- (b) (2 punten) Bereken β en γ . (Als u het antwoord op de vorige deelvraag niet gevonden heeft, stel dan $r = \tan \frac{\beta - \gamma}{2}$ met $r > 0$ en geef een antwoord in functie van r .)

1. Werk verzorgd, leg de redenering duidelijk uit en geef de berekeningen in detail weer.
2. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
3. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers mogen wel worden gebruikt.
4. Laat in uw antwoorden getallen zoals π , e , $\ln 2$ en $\sqrt{3}$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	Totaal
Punten	4	4	6	6	20

Vraag 1 _____ **4 punten**

- (a) (1 punt) Bepaal in $\mathbb{C}$ de nulpunten van de veelterm $x^2 + x + 1$ en schrijf ze in de trigonometrische vorm $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ met $r, \theta \in \mathbb{R}$.
- (b) (3 punten) Als n, m, k natuurlijke getallen zijn, bewijs dan dat de veelterm $x^{3n+2} + x^{3m+1} + x^{3k}$ deelbaar is door $x^2 + x + 1$.

Vraag 2 _____ **4 punten**

- (a) (3 punten) Stel de verzameling van oplossingen S van het volgende stelsel grafisch voor in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -2x + 3y + 6 \geq 0 \\ -2x^2 + 5x + y + 3 \geq 0 \\ -x - y^2 + 4 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- (b) (1 punt) Voor welk koppel (x, y) in S is $x - y$ maximaal?

Vraag 3 _____ **6 punten**

We geven twee rechten a en b in de ruimte met een orthonormaal assenstelsel:

$$a \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{en} \quad b \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

- (a) (1 punt) Geef een richtingsvector van a en van b .
- (b) (3 punten) Geef de cartesische vergelijkingen van de rechte p die de gemeenschappelijke loodlijn is van de rechten a en b .
- (c) (2 punten) Geef de cartesische vergelijkingen van een rechte q die a en de x -as snijdt en een hoek van 60° vormt met deze twee rechten. Begin met een schets.

Vraag 4 **6 punten**

De vakjes van het onderstaande rooster worden willekeurig ofwel blauw ofwel rood gekleurd, waarbij de kleur voor elk vakje willekeurig wordt gekozen.

- (a) (2 punten) Hoeveel verschillende manieren zijn er om het rooster in te kleuren?
- (b) (2 punten) Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er met minstens drie rode 2×2 vierkanten? Eenzelfde vak kan deel uitmaken van twee verschillende vierkanten. Het volgende rooster bijvoorbeeld bevat twee rode 2×2 vierkanten. (De letter geeft de kleur van het vak aan.)

B	B	B
R	R	R
R	R	R

- (c) (2 punten) Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er met precies één rood 2×2 vierkant? De andere vakjes kunnen rood of blauw zijn. Hier is een voorbeeld dat aan de voorwaarde voldoet:

R	R	R
R	R	B
B	B	B

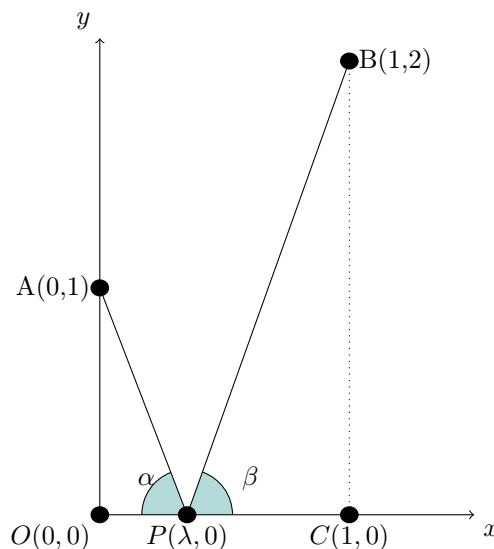
1. Werk verzorgd, leg de redenering duidelijk uit en geef de berekeningen in detail weer.
2. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
3. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers mogen wel worden gebruikt.
4. Laat in uw antwoorden getallen zoals π , e , $\ln 2$ en $\sqrt{3}$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	Totaal
Punten	5	4	5	6	20

Vraag 1 _____ 5 punten

In het vlak zijn de vaste punten $A(0,1)$ en $B(1,2)$ gegeven en een variabel punt $P(\lambda,0)$ met $0 < \lambda < 1$, zoals weergegeven in de figuur hiernaast.

Wat is het verband tussen de hoek $\alpha = \widehat{APO}$ en de hoek $\beta = \widehat{CPB}$ wanneer de lengte $|AP| + |PB|$ minimaal is?



De lengte $\ell = |AP| + |PB|$ als functie van λ wordt gegeven door

$$\ell(\lambda) = \sqrt{1 + \lambda^2} + \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 2^2}.$$

De afgeleide $\ell'(\lambda)$ is gelijk aan nul wanneer

$$\lambda\sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4} = -(\lambda - 1)\sqrt{\lambda^2 + 1}.$$

Men kan kwadrateren, en na vereenvoudiging bekomt men een tweedegraadsvergelijking

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

waarvan de oplossingen zijn

$$\lambda_{+,-} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3}.$$

De unieke positieve oplossing is $\lambda_+ = \frac{1}{3}$.

Men vindt dat

$$\alpha = \arctan \frac{1}{\lambda_+} = \arctan 3$$

$$\beta = \arctan \frac{2}{1 - \lambda_+} = \arctan 3$$

en dus geldt $\alpha = \beta$ als de lengte ℓ minimaal is. (De notatie $\arctan$ is een afkorting voor boogtangens, wat de inverse functie is van de tangens.)

Vraag 2 _____ **4 punten**

Voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ is de functie f_n gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{1+2x} \sqrt[4]{1+4x} \sqrt[6]{1+6x} \dots \sqrt[2n]{1+2nx}}{\sqrt[3]{1+3x} \sqrt[5]{1+5x} \sqrt[7]{1+7x} \dots \sqrt[2n+1]{1+(2n+1)x}}.$$

(a) (1 punt) Bereken de afgeleide van f_1 in $x = 0$.

Voor $n = 1$ vinden we de functie

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt[3]{1+3x}} = \frac{(1+2x)^{1/2}}{(1+3x)^{1/3}}.$$

We gebruiken de afleidingsregel voor een quotiënt:

$$f_1'(x) = \frac{(1+2x)^{-1/2}(1+3x)^{1/3} - (1+2x)^{1/2}(1+3x)^{-2/3}}{(1+3x)^{2/3}}.$$

We evalueren in $x = 0$:

$$f_1'(0) = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{1} = 0.$$

(b) (1 punt) Bereken de afgeleide van f_2 in $x = 0$.

In het geval $n = 2$:

$$f_2(x) = \frac{(1+2x)^{1/2}(1+4x)^{1/4}}{(1+3x)^{1/3}(1+5x)^{1/5}}$$

We herschrijven deze functie als een product van machten:

$$f_2(x) = (1+2x)^{1/2} \cdot (1+4x)^{1/4} \cdot (1+3x)^{-1/3} \cdot (1+5x)^{-1/5}$$

We passen de afgeleide van een product met vier factoren toe, [of een product van twee breuken zoals in de oplossing van \(c\), wat ook tot het resultaat zal leiden](#). We noteren:

$$f_2(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) \cdot D(x)$$

We leiden elke factor afzonderlijk af:

$$A'(x) = \frac{1}{2}(1+2x)^{-1/2} \cdot 2 = (1+2x)^{-1/2}$$

$$B'(x) = \frac{1}{4}(1+4x)^{-3/4} \cdot 4 = (1+4x)^{-3/4}$$

$$C'(x) = -\frac{1}{3}(1+3x)^{-4/3} \cdot 3 = -(1+3x)^{-4/3}$$

$$D'(x) = -\frac{1}{5}(1+5x)^{-6/5} \cdot 5 = -(1+5x)^{-6/5}$$

We evalueren alle functies en hun afgeleiden in $x = 0$:

$$A(0) = B(0) = C(0) = D(0) = 1$$

$$A'(0) = B'(0) = 1$$

$$C'(0) = D'(0) = -1$$

We passen de afgeleide van het product toe:

$$f_2'(0) = A'(0)B(0)C(0)D(0) + A(0)B'(0)C(0)D(0) + A(0)B(0)C'(0)D(0) + A(0)B(0)C(0)D'(0)$$

$$f_2'(0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = 0.$$

(c) (2 punten) Bereken de afgeleide van f_{100} in $x = 0$.

Merk op dat voor een positieve functie f geldt: $f = e^{\ln f}$.

Methode 1. We kunnen de regel toepassen voor de afgeleide van een product van 100 functies van de vorm

$$g_m(x) := \frac{\sqrt[2m]{1+2mx}}{\sqrt[2m+1]{1+(2m+1)x}} \quad (1 \leq m \leq 100)$$

wat geeft

$$f_{100}'(x) = g_1'(x)g_2(x) \dots g_{100}(x) + g_1(x)g_2'(x) \dots g_{100}(x) + \dots + g_1(x)g_2(x) \dots g_{100}'(x).$$

Voor $x = 0$ bevat elke term een nulfactor omdat

$$g_m'(0) = \frac{(1+2mx)^{\frac{1}{2m}-1}(1+(2m+1)x)^{\frac{1}{2m+1}} - (1+2mx)^{\frac{1}{2m}}(1+(2m+1)x)^{\frac{1}{2m+1}-1}}{(1+(2m+1)x)^{\frac{2}{2m+1}}} \Bigg|_{x=0} = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{1} = 0$$

en het antwoord is nul.

Methode 2. Volgens de suggestie kunnen we schrijven dat

$$f_{100}(x) = e^{\ln f_{100}(x)}$$

en dus

$$f_{100}'(x) = f_{100}(x) \cdot (\ln f_{100}(x))'.$$

We nemen de logaritme van f_{100} :

$$\ln f_{100}(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2k} \ln(1+2kx) - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2k+1} \ln(1+(2k+1)x).$$

Door af te leiden krijgen we:

$$\frac{d}{dx} \ln f_{100}(x) = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{1+2kx} - \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{1+(2k+1)x}.$$

Als we evalueren in $x = 0$, vinden we:

$$\frac{d}{dx} \ln f_{100}(x) \Bigg|_{x=0} = \sum_{k=1}^{100} 1 - \sum_{k=1}^{100} 1 = 0.$$

Bijgevolg,

$$f_{100}'(0) = f_{100}(0) \cdot \frac{d}{dx} \ln f_{100}(x) \Bigg|_{x=0} = f_{100}(0) \cdot 0 = 0.$$

Vraag 3 _____ 5 punten

- (a) (2 punten) Ontbind in partieelbreuken $\frac{1}{(t^2 + 1)(2t + 1)}$.

We zoeken naar een ontbinding onder volgende vorm:

$$\frac{1}{(t^2 + 1)(2t + 1)} = \frac{At + B}{t^2 + 1} + \frac{C}{2t + 1}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Daaruit volgt:

$$1 = (At + B)(2t + 1) + C(t^2 + 1).$$

We krijgen een 3×3 stelsel:

$$\begin{aligned} (t = 0) \quad & 1 = B + C \\ (t = 1) \quad & 1 = 3(A + B) + 2C \\ (t = -1) \quad & 1 = -(-A + B) + 2C. \end{aligned}$$

Uit de laatste twee vergelijkingen volgt $-2B = A$. Dus $C = 1 - B$.

Uit de tweede vergelijking volgt $1 = -6B + 3B + 2 - 2B$ en dus $B = \frac{1}{5}$.

Dus $A = -\frac{2}{5}$ en $C = \frac{4}{5}$.

We hebben gevonden dat

$$\frac{1}{(t^2 + 1)(2t + 1)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{-2t + 1}{t^2 + 1} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2t + 1}.$$

- (b) (3 punten) Bereken $\int \frac{2 \tan(x) - 1}{2 \tan(x) + 1} dx$ beginnend met de substitutie $t = \tan(x)$.

Stel $t = \tan x$. Dan is $dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x) dx = (1 + t^2) dx$. We noemen deze integraal I , en die wordt

$$I = \int \frac{2t - 1}{2t + 1} \frac{1}{1 + t^2} dt = \int \frac{2t + 1 - 2}{2t + 1} \frac{1}{1 + t^2} dt = \underbrace{\int \frac{dt}{1 + t^2}}_{I_1} - 2 \underbrace{\int \frac{dt}{(1 + t^2)(2t + 1)}}_{I_2}.$$

De eerste integraal I_1 is $\arctan t$. Beschouw nu de tweede integraal I_2 .

Volgens (a) is de tweede integraal gelijk aan

$$I_2 = \frac{1}{5} \left[\int \frac{-2t}{t^2 + 1} dt + \int \frac{dt}{t^2 + 1} \right] + \frac{2}{5} \int \frac{2}{2t + 1} dt = -\frac{1}{5} \ln(t^2 + 1) + \frac{1}{5} \arctan t + \frac{2}{5} \ln |2t + 1| + \text{const.}$$

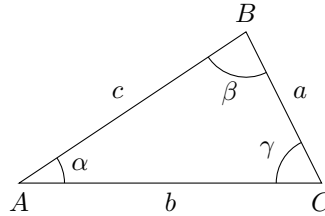
Ten slotte,

$$\begin{aligned} I &= I_1 - 2I_2 \\ &= \arctan t + \frac{2}{5} \ln(t^2 + 1) - \frac{2}{5} \arctan t - \frac{4}{5} \ln |2t + 1| + \text{const.} \\ &= \frac{3}{5} x + \frac{2}{5} \ln(\tan^2 x + 1) - \frac{4}{5} \ln |2 \tan x + 1| + \text{const.} \end{aligned}$$

Vraag 4 _____ 6 punten

In de onderstaande driehoek ABC kent men de grootte van de hoek bij A en de verhouding van de lengtes van de zijden $[AC]$ en $[AB]$:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{en} \quad \frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}.$$



- (a) (4 punten) Bereken $\tan \frac{\beta - \gamma}{2}$. U mag de sinusregel gebruiken.

De sinusregel zegt dat

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{b+c} &= \frac{\sin \beta - \sin \gamma}{\sin \beta + \sin \gamma} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)} \\ &= \frac{\tan\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)}. \end{aligned}$$

In het linkerlid:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\frac{b}{c} - 1}{\frac{b}{c} + 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}.$$

In het rechterlid:

$$\tan\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \tan \frac{\pi - \alpha}{2} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

We vinden dus

$$\tan \frac{\beta - \gamma}{2} = \sqrt{3} \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 + \sqrt{3}} = 1.$$

- (b) (2 punten) Bereken β en γ . (Als u het antwoord op de vorige deelvraag niet gevonden heeft, stel dan $r = \tan \frac{\beta - \gamma}{2}$ met $r > 0$ en geef een antwoord in functie van r .)

Uit de vorige deelvraag volgt

$$\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

In combinatie met $\frac{\pi}{3} + \beta + \gamma = \pi$, vinden we $\beta = \frac{7\pi}{12}$ en $\gamma = \frac{\pi}{12}$.

Op dezelfde manier, door te noteren $r := \tan \frac{\beta - \gamma}{2}$ vinden we

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\pi}{3} + \arctan r \\ \gamma &= \frac{\pi}{3} - \arctan r. \end{aligned}$$

1. Werk verzorgd, leg de redenering duidelijk uit en geef de berekeningen in detail weer.
2. De figuren bij sommige vragen zijn louter ter illustratie en niet op schaal. Meten is dus zinloos.
3. Handboeken en rekenmachines zijn niet toegestaan. Latten, gradenbogen, geodriehoeken en passers mogen wel worden gebruikt.
4. Laat in uw antwoorden getallen zoals π , e , $\ln 2$ en $\sqrt{3}$ in hun symbolische vorm staan.

Vraag	1	2	3	4	Totaal
Punten	4	4	6	6	20

Vraag 1 _____ **4 punten**

- (a) (1 punt) Bepaal in $\mathbb{C}$ de nulpunten van de veelterm $x^2 + x + 1$ en schrijf ze in de trigonometrische vorm $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ met $r, \theta \in \mathbb{R}$.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

In trigonometrische vorm zijn de nulpunten

$$x_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \quad \text{en} \quad x_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

- (b) (3 punten) Als n, m, k natuurlijke getallen zijn, bewijs dan dat de veelterm $x^{3n+2} + x^{3m+1} + x^{3k}$ deelbaar is door $x^2 + x + 1$.

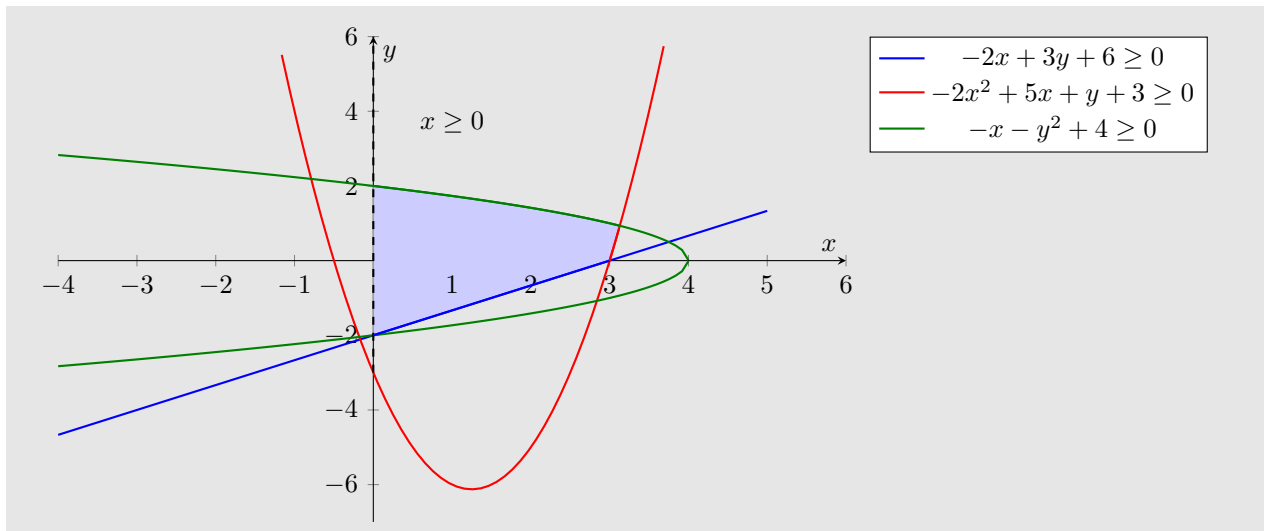
We moeten aantonen dat de veelterm x_1 en x_2 als nulpunten heeft. Beide gevallen zijn vergelijkbaar. We bekijken het geval van $x_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} x_1^{3n+2} + x_1^{3m+1} + x_1^{3k} &= x_1^{3n} x_1^2 + x_1^{3m} x_1 + x_1^{3k} \\ &= (x_1^3)^n x_1^2 + (x_1^3)^m x_1 + (x_1^3)^k \\ &= x_1^2 + x_1 + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vraag 2 _____ **4 punten**

- (a) (3 punten) Stel de verzameling van oplossingen S van het volgende stelsel grafisch voor in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} -2x + 3y + 6 \geq 0 \\ -2x^2 + 5x + y + 3 \geq 0 \\ -x - y^2 + 4 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



- (b) (1 punt) Voor welk koppel (x, y) in S is $x - y$ maximaal?

De rechte $x - y = 0$ is de eerste bissectrice. Als we deze rechte naar beneden/rechts verschuiven, neemt de waarde van $x - y$ toe en $(x - y)$ is dan maximaal in het punt $(3, 0)$.

Vraag 3 6 punten

We geven twee rechten a en b in de ruimte met een orthonormaal assenstelsel:

$$a \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{en} \quad b \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

- (a) (1 punt) Geef een richtingsvector van a en van b .

Voor a :

$$(x, y, z) \in a \iff (x, y, z) = (0, 2, k), \quad k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad a \parallel \vec{v}_a = (0, 0, 1).$$

Voor b :

$$(x, y, z) \in b \iff (x, y, z) = (k, k - 1, 2), \quad k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad b \parallel \vec{v}_b = (1, 1, 0).$$

- (b) (3 punten) Geef de cartesische vergelijkingen van de rechte p die de gemeenschappelijke loodlijn is van de rechten a en b .

We noteren $\vec{v}_p$ een richtingsvector van p . Aangezien $p \perp a$ en $p \perp b$ geldt, schrijven we

$$\vec{v}_p \circ \vec{v}_a = 0$$

$$\vec{v}_p \circ \vec{v}_b = 0.$$

Als gevolg kiezen we

$$\vec{v}_p = (1, -1, 0).$$

Omdat de rechte p door a gaat, kunnen we schrijven

$$p \equiv (x, y, z) = (0, 2, k) + \lambda \vec{v}_p, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

waarbij $k = 2$ moet zijn zodat de rechte p ook door b gaat.

Dus

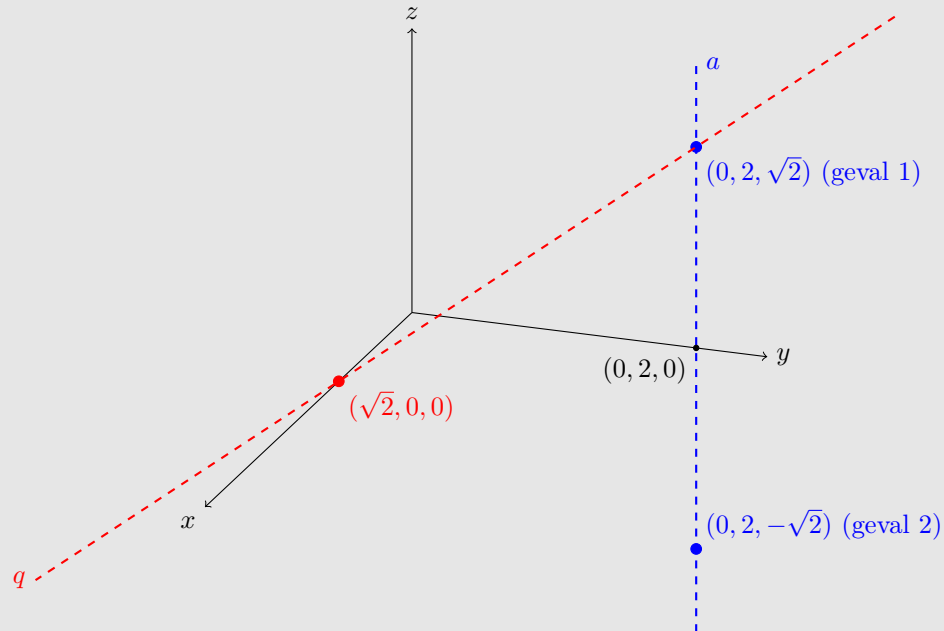
$$p \equiv (x, y, z) = (0, 2, 2) + \lambda(1, -1, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Hieruit verkrijgen we de cartesische vergelijkingen van p :

$$p \equiv \begin{cases} x = -y + 2 \\ z = 2. \end{cases}$$

- (c) (2 punten) Geef de cartesische vergelijkingen van een rechte q die a en de x -as snijdt en een hoek van 60° vormt met deze twee rechten. Begin met een schets.

Er zijn twee mogelijkheden voor q , afhankelijk van of het snijpunt met a zich boven of onder het vlak $z = 0$ bevindt.



We beschouwen het eerste geval. Aangezien de rechte q door de x -as gaat, kunnen we schrijven

$$q \equiv (x, y, z) = (x_0, 0, 0) + \gamma(u, v, w), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

We mogen aannemen dat $\vec{v}_q := (u, v, w)$ naar beneden wijst, zodat (volgens de opgave)

$$\begin{aligned} (u, v, w) \circ (+1, 0, 0) &= \|(u, v, w)\| \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \\ (u, v, w) \circ (0, 0, -1) &= \|(u, v, w)\| \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ. \end{aligned}$$

Daaruit volgt het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sqrt{u^2 + v^2 + 1} \\ -w &= \frac{1}{2} \sqrt{u^2 + v^2 + 1}. \end{aligned}$$

Als we $w = -1$ kiezen, leidt dit stelsel tot $u = 1$ en $v = -\sqrt{2}$ (het teken van v is gekozen volgens de tekening).

Dus $\vec{v}_q = (1, -\sqrt{2}, -1)$. We moeten nog x_0 bepalen door op te leggen dat q door a gaat,

$$(x_0, 0, 0) + \gamma(1, -\sqrt{2}, -1) \in a \quad \Rightarrow \quad x_0 = \sqrt{2}$$

en tenslotte

$$q \equiv (x, y, z) = (\sqrt{2}, 0, 0) + \gamma(1, -\sqrt{2}, -1), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Er volgt dat

$$q \equiv \frac{x - \sqrt{2}}{1} = \frac{-\sqrt{2}}{2} y = -z.$$

Vraag 4 6 punten

De vakjes van het onderstaande rooster worden willekeurig ofwel blauw ofwel rood gekleurd, waarbij de kleur voor elk vakje willekeurig wordt gekozen.

- (a) (2 punten) Hoeveel verschillende manieren zijn er om het rooster in te kleuren?

Er zijn 9 vakjes en telkens twee mogelijkheden, dus

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{9 \text{ factoren}} = 2^9.$$

- (b) (2 punten) Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er met minstens drie rode 2×2 vierkanten? Eenzelfde vak kan deel uitmaken van twee verschillende vierkanten. Het volgende rooster bijvoorbeeld bevat twee rode 2×2 vierkanten. (De letter geeft de kleur van het vak aan.)

B	B	B
R	R	R
R	R	R

- Aantal inkleuringen met precies 3 rode 2×2 vierkanten: 4. Er zijn 4 hoeken om het enige blauwe vakje te plaatsen.
- Aantal inkleuringen met precies 4 rode 2×2 vierkanten: 1. Het dambord is volledig rood.

Totaal : $4 + 1 = 5$.

- (c) (2 punten) Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er met precies één rood 2×2 vierkant? De andere vakjes kunnen rood of blauw zijn. Hier is een voorbeeld dat aan de voorwaarde voldoet:

R	R	R
R	R	B
B	B	B

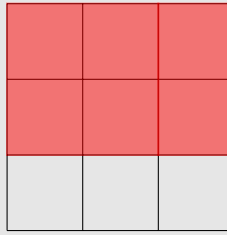
Er zijn 4 verschillende 2×2 vierkanten. Stel dat het rode vierkant linksboven staat en laten we de vakjes benoemen zoals op het schema rechts.

R	R	
R	R	

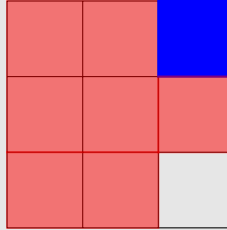
c_{11}	c_{12}	c_{13}
c_{21}	c_{22}	c_{23}
c_{31}	c_{32}	c_{33}

Om de resterende 5 vakjes in te kleuren, zijn er $2^5 = 32$ mogelijkheden, maar we moeten de volgende gevallen uitsluiten om geen nieuw rood vierkant te vormen (• betekent blauw of rood):

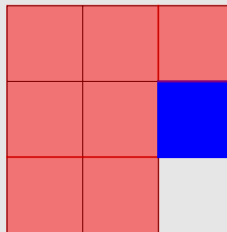
- $(c_{13}, c_{23}, c_{33}, c_{32}, c_{31}) = (R, R, \bullet, \bullet, \bullet) \rightarrow 2^3 = 8$ gevallen.



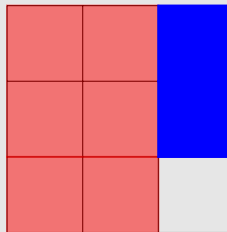
- $(c_{13}, c_{23}, c_{33}, c_{32}, c_{31}) = (B, R, \bullet, R, R) \rightarrow 2$ gevallen.



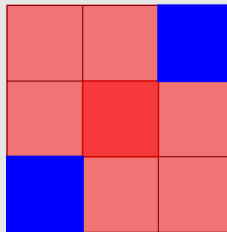
- $(c_{13}, c_{23}, c_{33}, c_{32}, c_{31}) = (R, B, \bullet, R, R) \rightarrow 2$ gevallen.



- $(c_{13}, c_{23}, c_{33}, c_{32}, c_{31}) = (B, B, \bullet, R, R) \rightarrow 2$ gevallen.



- $(c_{13}, c_{23}, c_{33}, c_{32}, c_{31}) = (B, R, R, R, B) \rightarrow 1$ geval.



Het aantal inkleuringen met precies één rood vierkant linksboven is dus

$$32 - (8 + 2 + 2 + 2 + 1) = 17.$$

Het aantal inkleuringen met precies één rood vierkant is

$$17 \times 4 = 68.$$