

1. La rédaction doit présenter le raisonnement avec soin et fournir le détail des calculs.
2. Les figures accompagnant certaines questions sont illustratives et ne sont pas à l'échelle. Il est donc inutile de les mesurer.
3. Les manuels et les calculatrices sont interdits. Cependant, les règles, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
4. Dans vos réponses, laissez les nombres tels que π , e , $\ln 2$ et $\sqrt{3}$ sous leur forme symbolique.

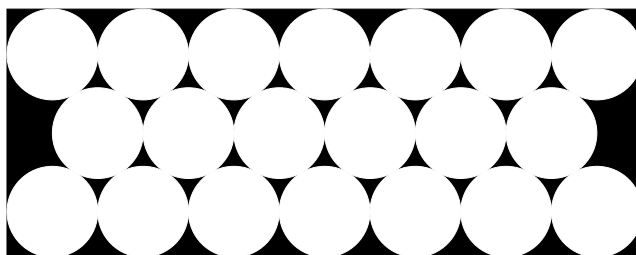
Question	1	2	3	4	Total
Points	5	6	4	5	20

Question 1 _____ **5 points**Résoudre dans \mathbb{R} :

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin x.$$

Question 2 _____ **6 points**On désigne par $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier plus petit ou égal à x . Par exemple, $\lfloor \pi \rfloor = 3 = \lfloor 3 \rfloor$ et $\lfloor -\frac{8}{9} \rfloor = -1$.(a) (2 points) Dessiner le graphe de la fonction $f(x) = x - \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$, pour $x \in [1, 4]$.(b) (2 points) Calculer $\int_1^4 \left(x - \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}\right) dx$.(c) (2 points) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $3\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.**Question 3** _____ **4 points**Trouver $x > 1$ de sorte que

$$\frac{\pi}{12} - \int_{\sqrt{2}}^x \frac{1}{y\sqrt{y^2-1}} dy = 0.$$

On pourra utiliser le changement de variable $u^2 = y^2 - 1$ pour calculer l'intégrale.**Question 4** _____ **5 points**Le schéma ci-dessous représente 20 cercles disposés dans un rectangle. Les cercles sont tangents l'un à l'autre et aux côtés du rectangle, comme visible sur le schéma. Les cercles ont le même rayon r .(a) (3 points) Montrer que la largeur (petit côté) du rectangle mesure $2(\sqrt{3} + 1)r$.(b) (1 point) Calculer en fonction de r l'aire de la surface coloriée en noir sur le schéma.

- (c) (1 point) Déterminer les nombres naturels a et b sachant que le rapport entre les longueurs du grand côté du rectangle et du petit côté du rectangle peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{2}(\sqrt{a} - b)$.

1. La rédaction doit présenter le raisonnement avec soin et fournir le détail des calculs.
2. Les figures accompagnant certaines questions sont illustratives et ne sont pas à l'échelle. Il est donc inutile de les mesurer.
3. Les manuels et les calculatrices sont interdits. Cependant, les règles, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
4. Dans vos réponses, laissez les nombres tels que π , e , $\ln 2$ et $\sqrt{3}$ sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	Total
Points	4	4	6	6	20

Question 1 _____ **4 points**

Pour cette question, z est un nombre complexe.

- (a) (1 point) Exprimer $\frac{z^5-1}{z-1}$ sous la forme d'un polynôme (en supposant que $z \neq 1$), en prenant soin de bien indiquer les étapes de votre calcul.
- (b) (3 points) On appelle m le produit des solutions de l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ qui ont une partie imaginaire strictement positive. (Les solutions qui ont une partie imaginaire négative ou nulle n'interviennent donc pas dans le produit m .) Donner m sous la forme $a + bi$. Indication: vous pourrez vous aider de la sous-question (a).

Question 2 _____ **4 points**

On donne le système suivant d'inconnues x et y avec a et b deux paramètres non nuls :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + y^3 = b. \end{cases}$$

- (a) (2 points) Sans résoudre le système, calculer xy en fonction des deux paramètres a et b .
- (b) (2 points) Résoudre le système par rapport à x et y .
Si vous n'avez pas trouvé la réponse à la sous-question précédente, vous pouvez supposer que $xy = C$ avec C une constante connue, et donner une expression pour x et y en fonction de C .

Question 3 _____ **6 points**

On donne deux droites a et b dans l'espace muni d'un repère orthonormé :

$$a \equiv 2x - 4 = y - 2 = z \quad \text{et} \quad b \equiv \begin{cases} x = 2 \\ 2y = 3z \end{cases}.$$

- (a) (2 points) Donner l'équation cartésienne du plan parallèle à a et contenant b .
- (b) (2 points) Donner les équations cartésiennes de la droite parallèle à l'axe des x et qui coupe les droites a et b .
- (c) (2 points) Déterminer le point $P \in a$ et le point $Q \in b$ tels que la droite PQ est parallèle au plan Oxy et tels que la distance de P à Q est minimale.

Question 4 _____ **6 points**

- (a) (1 point) Trouver le nombre de points (n, m) de \mathbb{R}^2 dont les coordonnées sont des nombres entiers strictement positifs et qui satisfont aux deux conditions suivantes :

$$m \leq 2n \leq 4 \quad \text{et} \quad n \leq 2m \leq 4.$$

On demande également de représenter dans un repère orthonormé les deux conditions et les points trouvés.

- (b) (2 points) Même question avec les deux conditions suivantes :

$$m \leq 2n \leq 12 \quad \text{et} \quad n \leq 2m \leq 12.$$

- (c) (3 points) Même question avec les deux conditions suivantes :

$$m \leq 2n \leq 60 \quad \text{et} \quad n \leq 2m \leq 60.$$

Vous pourrez éventuellement vous aider d'une représentation graphique, mais ce n'est plus exigé.