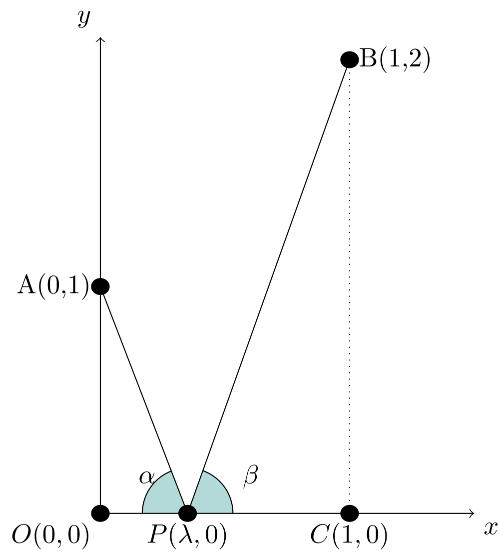
1. La rédaction doit présenter le raisonnement avec soin et fournir le détail des calculs.
2. Les figures accompagnant certaines questions sont illustratives et ne sont pas à l'échelle. Il est donc inutile de les mesurer.
3. Les manuels et les calculatrices sont interdits. Cependant, les règles, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
4. Dans vos réponses, laissez les nombres tels que π, e, $\ln 2$ et $\sqrt{3}$ sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	5	4	5	6	20

Question 1 ——— **5 points**

Dans le plan, on donne les points $A(0,1)$ et $B(1,2)$, ainsi que le point $P(\lambda, 0)$ avec $0 < \lambda < 1$ un paramètre variable, comme représenté sur la figure ci-contre.

Quel est le lien entre l'angle $\alpha = \widehat{APO}$ et l'angle $\beta = \widehat{CPB}$ si la longueur $|AP| + |PB|$ est minimale ?



Question 2 ——— **4 points**

Pour tout nombre naturel $n \geq 1$, la fonction f_n est définie par

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{1+2x}\ \sqrt[4]{1+4x}\ \sqrt[6]{1+6x}\ \ldots\ \sqrt[2n]{1+2nx}}{\sqrt[3]{1+3x}\ \sqrt[5]{1+5x}\ \sqrt[7]{1+7x}\ \ldots\ \sqrt[2n+1]{1+(2n+1)x}}.$$

(a) (1 point) Calculer la dérivée de f_1 en $x = 0$.

(b) (1 point) Calculer la dérivée de f_2 en $x = 0$.

(c) (2 points) Calculer la dérivée de f_{100} en $x = 0$.
Remarque : pour une fonction positive f, on peut écrire $f = e^{\ln f}$.

Question 3 ——— **5 points**

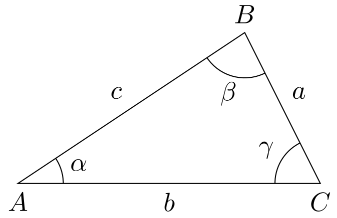
(a) (2 points) Décomposer en fractions partielles (fractions simples) $\dfrac{1}{(t^2+1)(2t+1)}$.

(b) (3 points) Calculer $\displaystyle\int \frac{2\tan(x)-1}{2\tan(x)+1}dx$ en commençant par un changement de variable $t = \tan(x)$.

Question 4 ——— **6 points**

Dans le triangle ABC représenté ci-dessous, on connaît la mesure de l'angle en A et le rapport des longueurs des côtés $[AC]$ et $[AB]$:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{c} = 2 + \sqrt{3}.$$



(a) (4 points) Calculer $\tan \dfrac{\beta - \gamma}{2}$. On pourra utiliser la loi des sinus.

(b) (2 points) Calculer β et γ. (Si vous n'avez pas trouvé la réponse à la sous-question précédente, vous pouvez noter r la valeur de $\tan \frac{\beta-\gamma}{2}$ avec $r > 0$ et donner ici une réponse en fonction de r.)

Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2025 Algèbre - Géométrie analytique - Probabilités **Série B Partie 2**

4 questions - 3 heures

1. La rédaction doit présenter le raisonnement avec soin et fournir le détail des calculs.
2. Les figures accompagnant certaines questions sont illustratives et ne sont pas à l'échelle. Il est donc inutile de les mesurer.
3. Les manuels et les calculatrices sont interdits. Cependant, les règles, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
4. Dans vos réponses, laissez les nombres tels que π, e, $\ln 2$ et $\sqrt{3}$ sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	4	4	6	6	20

Question 1 — 4 points

(a) (1 point) Trouver dans $\mathbb{C}$ les racines du polynôme $x^2 + x + 1$ et les écrire sous la forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r, \theta \in \mathbb{R}$.

(b) (3 points) Sachant que n, m, k sont des nombres naturels, démontrer que le polynôme $x^{3n+2} + x^{3m+1} + x^{3k}$ est divisible par $x^2 + x + 1$.

Question 2 — 4 points

(a) (3 points) Représenter graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des solutions S du système suivant :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 6 \geq 0 \\ -2x^2 + 5x + y + 3 \geq 0 \\ -x - y^2 + 4 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

(b) (1 point) Dans S, quel est le couple (x, y) tel que $x - y$ est maximal ?

Question 3 — 6 points

On donne deux droites a et b dans l'espace muni d'un repère orthonormé :

$$a \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad b \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad .$$

(a) (1 point) Donner un vecteur directeur de a et de b.

(b) (3 points) Donner les équations cartésiennes de la droite p qui est la perpendiculaire commune des droites a et b.

(c) (2 points) Donner les équations cartésiennes d'une droite q qui coupe a et l'axe des x et qui forme avec ces deux droites un angle de $60°$. Commencer par un schéma.

Question 4 **6 points**

On colorie les cases du quadrillage ci-dessous soit en bleu soit en rouge, la couleur étant choisie au hasard pour chaque case.

<table>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
</table>

(a) (2 points) Combien y a-t-il de façons différentes de colorier le quadrillage ?

(b) (2 points) Combien y a-t-il de coloriages différents comprenant au moins trois carrés 2×2 coloriés en rouge ? Une même case peut faire partie de deux carrés différents. Par exemple le quadrillage suivant comporte deux carrés 2×2 rouges. (La lettre indique la couleur de la case.)

<table>
<tr><td>B</td><td>B</td><td>B</td></tr>
<tr><td>R</td><td>R</td><td>R</td></tr>
<tr><td>R</td><td>R</td><td>R</td></tr>
</table>

(c) (2 points) Combien y a-t-il de coloriages différents comprenant exactement un carré 2×2 colorié en rouge ? Les autres cases peuvent être rouges ou bleues. Voici un exemple qui satisfait à la condition :

<table>
<tr><td>R</td><td>R</td><td>R</td></tr>
<tr><td>R</td><td>R</td><td>B</td></tr>
<tr><td>B</td><td>B</td><td>B</td></tr>
</table>