Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2025 | Analyse - Trigonométrie - Géométrie | **Série A Partie 1**

4 questions - 3 heures

1. La rédaction doit présenter le raisonnement avec soin et fournir le détail des calculs.
2. Les figures accompagnant certaines questions sont illustratives et ne sont pas à l'échelle. Il est donc inutile de les mesurer.
3. Les manuels et les calculatrices sont interdits. Cependant, les règles, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
4. Dans vos réponses, laissez les nombres tels que π, e, $\ln 2$ et $\sqrt{3}$ sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	4	5	5	6	20

Question 1 — **4 points**

On sait que

$$\int_0^\pi e^x \cos(2x)dx = \frac{e^\pi - 1}{5}.$$

On demande de calculer A et B donnés par

$$A = \int_0^\pi e^x \cos^2(x)\, dx \quad \text{et} \quad B = \int_0^\pi e^x \sin^2(x)\, dx.$$

Il n'est pas nécessaire d'effectuer les intégrales pour trouver la réponse.

Question 2 — **5 points**

(a) (3 points) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right).$$

(b) (2 points) Déterminer la ou les valeurs possibles de la constante $a > 0$ de sorte que

$$x \cdot \ln\left(\frac{e^a x + x + 3}{e^{-a}x - x - 3}\right)$$

ait une limite réelle lorsque $x \to +\infty$.

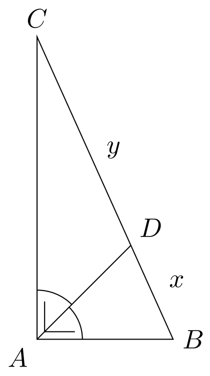
Question 3 — **5 points**

Par intégration par parties (deux fois), montrer que

$$\int_0^\pi e^x \cos(2x)dx = \frac{e^\pi - 1}{5}.$$

Question 4 ______________________________ **6 points**

Le triangle ABC est rectangle en A. La bissectrice issue de A croise le côté opposé au point D. Cette bissectrice partage le côté $[BC]$ en deux morceaux de longueurs $x = |BD|$ et $y = |DC|$.



(a) (3 points) Prouver que le rapport des longueurs des côtés $\frac{|AC|}{|AB|}$ vaut $\frac{y}{x}$.

(b) (2 points) Exprimer les longueurs des côtés $|AB|$, $|AC|$ et $|BC|$ en fonction de x et y.

(c) (1 point) La hauteur issue de A croise le côté opposé $[BC]$ au point H. Exprimer $|AH|$ en fonction de x et y.

Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2025 Algèbre - Géométrie analytique - Probabilités **Série A Partie 2**

4 questions - 3 heures

1. La rédaction doit présenter le raisonnement avec soin et fournir le détail des calculs.
2. Les figures accompagnant certaines questions sont illustratives et ne sont pas à l'échelle. Il est donc inutile de les mesurer.
3. Les manuels et les calculatrices sont interdits. Cependant, les règles, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
4. Dans vos réponses, laissez les nombres tels que π, e, $\ln 2$ et $\sqrt{3}$ sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	4	4	6	6	20

Question 1 — 4 points

Résoudre dans $\mathbb{R}$, avec i l'unité imaginaire :

$$1+\big(\cos(x)+i\sin(x)\big)\big(\cos(2x)+i\sin(2x)\big)\big(\cos(3x)+i\sin(3x)\big)\big(\cos(4x)+i\sin(4x)\big)=0.$$

Question 2 — 4 points

Un polynôme $p(x)$ de degré 4 est divisible par x, $(x+2)$ et $(3x-2)$. Le quotient de la division de $p(x)$ par (x^3+1) est $(x+1)$.

(a) (3 points) Déterminer le reste de la division de $p(x)$ par (x^3+1).

(b) (1 point) Déterminer $p(x)$.

Question 3 — 6 points

On donne les équations cartésiennes de deux droites d_1, d_2 dans un repère orthonormé de l'espace :

$$d_1 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \quad , \quad d_2 \equiv \begin{cases} x-y=-2 \\ z=1 \end{cases} \quad .$$

(a) (1 point) Déterminer les coordonnées du point P qui est le point d'intersection entre d_1 et d_2.

(b) (2 points) Montrer que d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

(c) (3 points) Déterminer les équations cartésiennes d'une droite d_3 qui coupe d_1 et d_2, et telle que d_1, d_2, d_3 forment un triangle isocèle et la distance entre P et d_3 vaut 3.

Question 4 — 6 points

(a) (2 points) Trouver le coefficient de x^2 dans l'expansion de

$$(1-x)(1+2x)(1-3x)(1+4x)(1-5x).$$

(b) (4 points) Trouver le coefficient de x^2 dans l'expansion de

$$(1-x)(1+2x)(1-3x)(1+4x)\cdots(1+14x)(1-15x).$$

Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2025 Analyse - Trigonométrie - Géométrie **Série A Partie 1**

4 questions - 3 heures

1. La rédaction doit présenter le raisonnement avec soin et fournir le détail des calculs.
2. Les figures accompagnant certaines questions sont illustratives et ne sont pas à l'échelle. Il est donc inutile de les mesurer.
3. Les manuels et les calculatrices sont interdits. Cependant, les règles, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
4. Dans vos réponses, laissez les nombres tels que π, e, $\ln 2$ et $\sqrt{3}$ sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	4	5	5	6	20

Question 1 — **4 points**

On sait que

$$\int_0^\pi e^x \cos(2x)dx = \frac{e^\pi - 1}{5}.$$

On demande de calculer A et B donnés par

$$A = \int_0^\pi e^x \cos^2(x)\,dx \quad \text{et} \quad B = \int_0^\pi e^x \sin^2(x)\,dx.$$

Il n'est pas nécessaire d'effectuer les intégrales pour trouver la réponse.

$$A + B = \int_0^\pi e^x dx = e^\pi - 1$$
$$A - B = \int_0^\pi e^x \cos(2x)dx = \frac{e^\pi - 1}{5}.$$

De là

$$A = \frac{3}{5}\left(e^\pi - 1\right) \quad \text{et} \quad B = \frac{2}{5}\left(e^\pi - 1\right).$$

Question 2 — **5 points**

(a) (3 points) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right).$$

La limite a une forme indéterminée "$\infty \cdot 0$". On réécrit l'expression de manière à pouvoir appliquer la règle de l'Hospital :

$$x \cdot \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right) = \frac{\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)}{1/x}$$

On peut appliquer l'Hospital pour une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

- Numérateur :

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)\right] = \frac{1}{\frac{x+3}{x-3}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x+3}{x-3}\right) = \frac{-6}{(x-3)(x+3)}$$

- Dénominateur :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

On prend le quotient de ces deux dérivées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-6}{(x-3)(x+3)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{(x-3)(x+3)} = 6.$$

(b) (2 points) Déterminer la ou les valeurs possibles de la constante $a > 0$ de sorte que

$$x \cdot \ln\left(\frac{e^a x + x + 3}{e^{-a} x - x - 3}\right)$$

ait une limite réelle lorsque $x \to +\infty$.

On écrit le numérateur de la fraction comme

$$\frac{e^a x + x + 3}{e^{-a} x - x - 3} = \frac{(e^a + 1)\, x + 3}{(e^{-a} - 1)\, x - 3}$$

Il faut que

$$e^a + 1 = e^{-a} - 1.$$

Cette condition est nécessaire puisqu'il faut que la fonction logarithme tende vers zéro. Cette condition est suffisante au vu de la sous-question (a). C'est une équation du second degré en $X = e^a$:

$$X^2 + 2X - 1 = 0.$$

Il vient $e^a = \sqrt{2} - 1 > 0$ et donc $a = \ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Question 3 — **5 points**

Par intégration par parties (deux fois), montrer que

$$\int_0^\pi e^x \cos(2x) dx = \frac{e^\pi - 1}{5}.$$

Première intégration par parties : on pose $u = \cos(2x)$, $v = e^x$ donc $du = -2\sin(2x)dx$ et $dv = e^x dx$. Cela donne

$$I = \int e^x \cos(2x)\, dx = e^x \cos(2x) + 2 \int e^x \sin(2x)\, dx.$$

Deuxième intégration par parties : on pose $u = \sin(2x)$, $v = e^x$ donc $du = 2\cos(2x)dx$ et $dv = e^x dx$. Cela donne

$$\int e^x \sin(2x)\, dx = e^x \sin(2x) - 2 \underbrace{\int e^x \cos(2x)\, dx}_{=I}$$

On remplace :

$$I = e^x \cos(2x) + 2\left(e^x \sin(2x) - 2I\right)$$

et donc

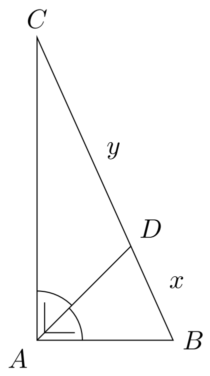
$$5I = e^x(\cos(2x) + 2\sin(2x)).$$

On évalue entre 0 et π :

$$\int_0^\pi e^x \cos(2x)\, dx = \frac{1}{5} e^x(\cos(2x) + 2\sin(2x))\Big|_0^\pi = \frac{1}{5}(e^\pi - 1).$$

Question 4 ______ **6 points**

Le triangle ABC est rectangle en A. La bissectrice issue de A croise le côté opposé au point D. Cette bissectrice partage le côté $[BC]$ en deux morceaux de longueurs $x = |BD|$ et $y = |DC|$.



(a) (3 points) Prouver que le rapport des longueurs des côtés $\frac{|AC|}{|AB|}$ vaut $\frac{y}{x}$.

Soit $\beta = \widehat{ABC}$. On peut écrire

$$\tan\beta = \frac{|AC|}{|AB|}. \tag{1}$$

On veut exprimer x et y en fonction de β. On pose $\alpha = \widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \frac{\pi}{4}$. En utilisant la loi des sinus dans le triangle ABD et dans le triangle ADC:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{|AD|}{\sin\beta} \qquad \text{et} \qquad \frac{y}{\sin\alpha} = \frac{|AD|}{\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)}.$$

En divisant membre à membre la deuxième équation par la première, on trouve

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \tan\beta, \tag{2}$$

où on a utilisé le fait que $\sin(\frac{\pi}{2}-\beta) = \cos\beta$. En combinant (1) avec (2) on a le résultat voulu.

(b) (2 points) Exprimer les longueurs des côtés $|AB|$, $|AC|$ et $|BC|$ en fonction de x et y.

- Pour $|AB|$, on utilise la formule $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$. Cela donne:

$$|AB| = (x+y)\cos\beta = (x+y)\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = (x+y)\frac{1}{\sqrt{1+y^2/x^2}} = \frac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- Pour $|AC|$, on utilise la formule $\sin\beta = \dfrac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$. Cela donne:

$$|AC| = (x+y)\sin\beta = (x+y)\frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = (x+y)\frac{y/x}{\sqrt{1+y^2/x^2}} = \frac{y(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

- Par définition de x et y, $|BC| = x + y$.

(c) (1 point) La hauteur issue de A croise le côté opposé $[BC]$ au point H. Exprimer $|AH|$ en fonction de x et y.

L'aire du triangle ABC vaut $(x+y)|AH| = |AB| \cdot |AC|$. Dès lors, en utilisant les expressions de $|AB|$ et $|AC|$ en fonction de x et y on trouve

$$|AH| = \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}.$$

Ecole Royale Militaire - Epreuve complémentaire POL

2025 Algèbre - Géométrie analytique - Probabilités **Série A Partie 2**

4 questions - 3 heures

1. La rédaction doit présenter le raisonnement avec soin et fournir le détail des calculs.
2. Les figures accompagnant certaines questions sont illustratives et ne sont pas à l'échelle. Il est donc inutile de les mesurer.
3. Les manuels et les calculatrices sont interdits. Cependant, les règles, rapporteurs, équerres et compas sont autorisés.
4. Dans vos réponses, laissez les nombres tels que π, e, $\ln 2$ et $\sqrt{3}$ sous leur forme symbolique.

Question	1	2	3	4	**Total**
Points	4	4	6	6	20

Question 1 **4 points**

Résoudre dans $\mathbb{R}$, avec i l'unité imaginaire :

$$1+\big(\cos(x)+i\sin(x)\big)\big(\cos(2x)+i\sin(2x)\big)\big(\cos(3x)+i\sin(3x)\big)\big(\cos(4x)+i\sin(4x)\big)=0.$$

Remarque de notation pour un nombre complexe de module 1 et d'argument α :

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha=\operatorname{cis}\alpha.$$

Dans cet exercice on utilise la propriété

$$e^{i\alpha}e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}=\operatorname{cis}\alpha\operatorname{cis}\beta=\operatorname{cis}(\alpha+\beta).$$

L'équation s'écrit

$$1+e^{ix}e^{2ix}e^{3ix}e^{4ix}=0$$

ou encore

$$e^{i(x+2x+3x+4x)}=-1.$$

Les solutions sont

$$x=\frac{1}{10}(\pi+2k\pi)\,,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Question 2 **4 points**

Un polynôme $p(x)$ de degré 4 est divisible par x, $(x+2)$ et $(3x-2)$. Le quotient de la division de $p(x)$ par (x^3+1) est $(x+1)$.

(a) (3 points) Déterminer le reste de la division de $p(x)$ par (x^3+1).

On peut écrire

$$p(x)=(x^3+1)(x+1)+ax^2+bx+c.$$

En utilisant l'énoncé :

- $p(0)=0$ et donc $c=-1$
- $p(-2)=0$ et donc $4a-2b+c=-7$
- $p(2/3)=0$ et donc $\frac{35}{27}\frac{5}{3}+\frac{4a}{9}+\frac{2b}{3}+c=0.$

Le système à résoudre est

$$\begin{cases} c &= -1\\ 4a-2b &= -6\\ 4a+6b &= -\frac{94}{9}\end{cases}$$

La solution est
$$a = -\frac{16}{9}, \quad b = -\frac{5}{9}, \quad c = -1.$$
Le reste de la division est
$$-\frac{16}{9}x^2 - \frac{5}{9}x - 1.$$

(b) (1 point) Déterminer $p(x)$.

Suivant (a)
$$p(x) = x^4 + x^3 - \frac{16}{9}x^2 + \frac{4}{9}x.$$

Question 3 ——————————————————— **6 points**

On donne les équations cartésiennes de deux droites d_1, d_2 dans un repère orthonormé de l'espace :
$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}, \quad d_2 \equiv \begin{cases} x - y = -2 \\ z = 1 \end{cases}.$$

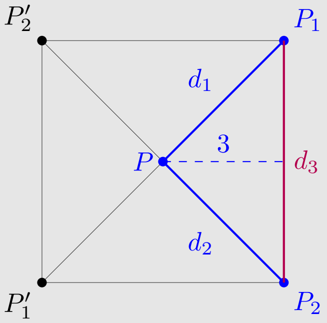
(a) (1 point) Déterminer les coordonnées du point P qui est le point d'intersection entre d_1 et d_2.

$d_1 \cap d_2 = P(0, 2, 1)$.

(b) (2 points) Montrer que d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

$d_1 \parallel \vec{v}_1 = (0, 0, 1)$ et $d_2 \parallel \vec{v}_2 = (1, 1, 0)$.
$\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad d_1 \perp d_2$.

(c) (3 points) Déterminer les équations cartésiennes d'une droite d_3 qui coupe d_1 et d_2, et telle que d_1, d_2, d_3 forment un triangle isocèle et la distance entre P et d_3 vaut 3.



Il y a 4 possibilités pour d_3.

Coordonnées de P_1 : $\big(0, 2, 1\big) + k_1 \big(0, 0, 1\big)$.
Coordonnées de P_2 : $\big(0, 2, 1\big) + k_2 \big(1, 1, 0\big)$.

$$\operatorname{dist}(P, P_1) = \operatorname{dist}(P, P_2) \iff k_1^2 = 2k_2^2$$
$$\operatorname{dist}(P_1, P_2) = 2\operatorname{dist}(P, d_3) \iff k_1^2 + 2k_2^2 = 36$$

De façon équivalente:
$$k_1^2 = \frac{36}{2}$$
$$k_2^2 = \frac{36}{4}$$

Il y a 4 solutions:
$$k_1 = 3\sqrt{2}, \quad k_1' = -3\sqrt{2}, \quad k_2 = 3, \quad k_2' = -3.$$

Et donc
$$P_1(0, 2, 1 + 3\sqrt{2}), \quad P_1'(0, 2, 1 - 3\sqrt{2}), \quad P_2(3, 5, 1), \quad P_2'(-3, -1, 1).$$

Si on choisit $d_3 = P_1P_2$, alors

$$d_3 \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{-3\sqrt{2}}$$

(ou $d_3 = P_1P_2'$ ou $d_3 = P_1'P_2$ ou $d_3 = P_1'P_2'$).

Question 4 — **6 points**

(a) (2 points) Trouver le coefficient de x^2 dans l'expansion de

$$(1-x)(1+2x)(1-3x)(1+4x)(1-5x).$$

Pour obtenir un terme en x^2, on doit prendre deux facteurs contenant un x, et les trois autres sont des constantes qui valent 1.

$$\text{Coeff. de } x^2 = \sum_{1\leq i<j\leq 5} a_i a_j,$$

où $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_3 = -3$, $a_4 = 4$, $a_5 = -5$ sont les coefficients de x dans chaque facteur.

$$\begin{aligned}\text{Coeff. de } x^2 &= (-1)(2) + (-1)(-3) + \cdots + (4)(-5)\\ &= -2+3-4+5-6+8-10-12+15-20\\ &= -23.\end{aligned}$$

Ou simplement en effectuant :

$$-120x^5 + 94x^4 + 51x^3 - 23x^2 - 3x + 1.$$

(b) (4 points) Trouver le coefficient de x^2 dans l'expansion de

$$(1-x)(1+2x)(1-3x)(1+4x)\cdots(1+14x)(1-15x).$$

On peut procéder comme pour la sous-question (a). **Variante légèrement différente :**
Pour organiser le calcul on peut noter les a_i dans une liste

$$\{-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, \ldots, +14, -15\}.$$

On devra

- mutiplier -15 par la somme des entiers à sa gauche, i.e. -15×7
- multiplier 14 par la somme des entiers à sa gauche, i.e. 14×-7
- multiplier -13 par la somme des entiers à sa gauche, i.e. -13×6
- multiplier 12 par la somme des entiers à sa gauche, i.e. 12×-6
- ...

On obtient donc comme coefficient

$$-(15+14)\times 7 - (13+12)\times 6 - (11+10)\times 5 - \ldots - (5+4)\times 2 - (3+2)\times 1 = -588.$$